



Ana Rita Santos Neves Rodrigues

Licenciada em Matemática

Tábuas de mortalidade dinâmica do setor segurador português - modelo de análise dos pressupostos de mortalidade

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática e Aplicações

Ramo Atuariado, Estatística e Investigação Operacional

Orientadoras: Maria de Lourdes Belchior Afonso,
Professora Auxiliar,
Faculdade Ciências e Tecnologia
Ana Teresa Vicente,
Técnica de Supervisão de Seguros, ASF

Júri

Presidente: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Arguente: Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real
Vogal: Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Novembro, 2020

Tábuas de mortalidade dinâmica do setor segurador português - modelo de análise dos pressupostos de mortalidade

Copyright © Ana Rita Santos Neves Rodrigues, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Quero começar por manifestar um especial agradecimento às minhas orientadoras: à Professora Doutora Lourdes Afonso fico muito grata por ter acreditado nas minhas capacidades ao sugerir o estágio, por ter estreitado a ligação com a instituição que me acolheu e ainda pela orientação e disponibilidade demonstradas, e à Dra. Ana Teresa Vicente agradeço os conhecimentos que me transmitiu, a orientação, disponibilidade e apoio que foram determinantes para a realização da dissertação.

À Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões (ASF), agradeço por terem apostado em mim para a realização deste trabalho e por bem me acolherem.

Agradeço à minha família e em especial aos meus pais e à minha irmã que me acompanham em todas as etapas e proporcionam ferramentas para ser e fazer melhor; são para mim um exemplo e sem eles não seria possível.

Quero agradecer à Mariana pelo apoio e amizade demonstrados; à Juliana, Márcia, Ema e André que foram a minha família de mestrado e a companhia de muitos momentos que não irei esquecer.

Aos meus amigos e colegas de Coimbra que me acompanharam ao longo do percurso académico e que estiveram sempre presentes.

Quero ainda agradecer a uma pessoa que me é muito especial, ao Filipe.

RESUMO

O estudo da mortalidade tem uma grande importância para as empresas de seguros tendo em conta a necessidade de adotar bases técnicas adequadas às responsabilidades que assumem, bem como para as entidades de regulação e supervisão da atividade seguradora, dado o papel fundamental que desempenham na proteção dos tomadores de seguros e beneficiários através da avaliação e validação dos pressupostos adotados. Nesta dissertação é apresentado o estudo da mortalidade de duas populações de seguros. As populações em análise são as de seguros de vida em caso de morte e de pensionistas de seguros de acidentes de trabalho. O objetivo central passa por desenvolver um modelo de referência que permita avaliar a adequabilidade dos pressupostos adotados pelas empresas de seguros no cálculo das suas responsabilidades.

O trabalho assenta numa abordagem dinâmica da mortalidade através do modelo Poisson Lee-Carter tendo por base a mortalidade da população portuguesa, e na aplicação de modelos relacionais, de forma a incluir as especificidades das populações seguras em análise.

Palavras-chave: Tábuas de Mortalidade Dinâmicas, Poisson Lee-Carter, Seguros de Vida em Caso de Morte, Acidentes de Trabalho.

ABSTRACT

The analysis of mortality has great importance to insurance companies considering the need to adopt technical bases that fit the undertaken responsibilities, as well as for the supervisory authorities given the fundamental role in protecting policy holders and beneficiaries through the evaluation and validation of the technical bases. This thesis exhibits the study of the mortality of a life insured population and of workers' compensation pensioners. The main intention was the creation of a reference model that allows the evaluation of technical bases' adequacy adopted by insurance companies to calculate technical provisions.

The thesis basis itself on the dynamic approach of mortality through the Poisson Lee-Carter method taking into account the portuguese mortality and the application of relational models in a way of including the specificities of the insured populations in analysis.

Keywords: Dynamic Life Tables, Poisson Lee-Carter, Life insurance, Workers' Compensation Insurance.

ÍNDICE

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Siglas	xix
1 Introdução	1
2 Revisão da Literatura	5
3 Fundamentação Teórica	9
3.1 Modelo Poisson Lee-Carter	9
3.2 Método Denuit-Goderniaux	12
3.3 Modelos Relacionais	13
3.3.1 Modelo Relacional tipo-Brass	13
3.3.2 Modelo de Riscos Proporcionais de Cox	14
4 Aplicação	15
4.1 Modelo Poisson Lee-Carter	15
4.2 Extrapolação da tendência temporal	17
4.3 Método Denuit-Goderniaux	18
4.4 Modelo Relacional	19
4.4.1 Seguros de Vida em Caso de Morte	19
4.4.2 Acidentes de Trabalho	27
4.5 Tabelas de Contingência	31
5 Conclusão	33
Bibliografia	35
I Bibliotecas do R empregues	37
II Metainformação dos dados	39
II.1 Exposição ao Risco: por sexo, desde 1970 (população portuguesa)	39
II.2 Taxa de Mortalidade: por sexo, desde 1970 (população portuguesa)	40

III Estimativas dos parâmetros do modelo PLC	41
---	-----------

LISTA DE FIGURAS

4.1	Estimativa dos parâmetros do modelo Poisson Lee-Carter	16
4.2	Evolução da probabilidade de morte para a população portuguesa (sexo feminino à esquerda, masculino ao meio e sem distinção à direita)	18
4.3	População de Seguros de Vida em Caso de Morte	20
4.4	Mortalidade SCM ajustada pelo modelo relacional tipo-Brass (sexo feminino em cima, à esquerda, masculino em cima, à direita e sem distinção em baixo)	21
4.5	Mortalidade SCM ajustada pelo modelo de Riscos Proporcionais de Cox (sexo feminino em cima, à esquerda, masculino em cima, à direita e sem distinção em baixo)	22
4.6	Modelo Relacional SCM (sexo feminino em cima, à esquerda, masculino em cima, à direita e sem distinção em baixo)	23
4.7	Modelos relacionais aplicados à mortalidade de SCM (sexo feminino em cima, masculino ao meio e sem distinção em baixo)	25
4.8	Comparação de tábuas utilizadas em SCM	26
4.9	População de Pensionistas de Seguros de Acidentes de Trabalho	27
4.10	Modelos relacionais aplicados à mortalidade de AT, 18-80 anos (sexo feminino em cima, masculino ao meio e sem distinção em baixo)	28
4.11	Comparação de tábuas utilizadas em seguros de Acidentes de Trabalho	30

LISTA DE TABELAS

4.1	Estimativas dos parâmetros do modelo ARIMA(1,1,0) with drift	17
4.2	Estimativas dos parâmetros do modelo relacional tipo-Brass	20
4.3	Parâmetros do modelo de riscos proporcionais de Cox	22
4.4	Estimativas dos parâmetros dos modelos relacionais aplicados às idades 40-60	24
4.5	Parâmetros do modelo relacional tipo-Brass - sexo feminino e sem distinção .	29
4.6	Parâmetros do modelo de riscos proporcionais de Cox - sexo masculino . . .	29
III.1	Estimativas do parâmetro k_t do modelo PLC	41
III.2	Estimativas dos parâmetros α_x e β_x do modelo PLC	42
III.3	Estimativas dos parâmetros α_x e β_x do modelo PLC (continuação)	43

SIGLAS

ASF Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões.

AT Seguros de Acidentes de Trabalho.

EIOPA Autoridade Europeia dos Seguros e Pensões Complementares de Reforma.

INE Instituto Nacional de Estatística.

PLC Modelo Poisson Lee-Carter.

SCM Seguros de Vida em caso de Morte.

INTRODUÇÃO

A tendência demográfica em Portugal nas últimas décadas foi marcada pelo abrandamento do crescimento demográfico motivado pela diminuição da taxa de fecundidade e aumento considerável do envelhecimento. Estes fatores acentuam o envelhecimento demográfico seja devido à diminuição da proporção de jovens na população como também pelo aumento da proporção da população idosa, com idades superiores ou iguais aos 65 anos (INE, 2019). A esperança de vida à nascença para a população geral, em Portugal, no período 2017-2019, é de 80,93 anos verificando-se um aumento de 4,5 anos desde o início do milénio (INE, 2020) (FFMS, s.d.). Os ganhos na esperança de vida constituem um impacto significativo na economia e, em particular, no setor segurador com consequências visíveis nas responsabilidades assumidas pelas empresas de seguros.

A problemática do envelhecimento exige a adaptação de métodos e pressupostos atuariais que se coadunem com a evolução dos tempos e que garantam o equilíbrio financeiro e a solvabilidade das empresas de seguros. Em Portugal, compete à ASF, Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões, garantir as boas práticas por parte das empresas de seguros, salvaguardando a proteção dos interesses dos segurados.

Atualmente o mercado segurador utiliza no cálculo de prémios e responsabilidades tábuas de mortalidade estáticas. Estas são construídas com base em dados estatísticos de uma população fixa num dado período temporal e estimam quocientes de mortalidade para cada idade.

Do ponto de vista prático a utilização de tábuas de mortalidade estáticas constitui uma opção simples de implementar, contudo não é a solução mais prudente, tendo em conta que a evolução demográfica e económica e os avanços da tecnologia e cuidados de saúde potenciam o aumento da esperança de vida. De facto, quando são assumidos riscos por um período de tempo longo, devido à variabilidade dos mercados financeiros e elementos de risco como é o exemplo da longevidade, as estimativas de responsabilidades

podem não se revelar as mais adequadas com o decorrer do tempo.

É importante a escolha das bases técnicas de forma prudente e que acautelem possíveis condicionantes a que as carteiras de seguros estão expostas. A solução pode passar pela utilização de tábuas de mortalidade dinâmicas que têm em conta a tendência temporal da mortalidade sendo que, para a população portuguesa em geral e para subpopulações desta, específicas por modalidade de seguro, ainda não há registo de tábuas desta natureza.

No sentido de regular o mercado segurador europeu surge o projeto Solvência II que tem como objetivo garantir a gestão correta dos riscos de forma quantitativa e qualitativa zelando pelos interesses do tomador de seguro e da seguradora, através da criação de modelos adaptados à classe de risco. A implementação deste projeto prevê a utilização de tábuas de mortalidade que reflitam de forma realista os avanços demográficos, económicos, tecnológicos e que sejam o mais atuais possível; o que corrobora a pertinência do estudo e implementação das tábuas de mortalidade dinâmicas.

A importância do trabalho surge da colaboração com a ASF e tem como propósito a criação de modelos para seguros de vida em caso de morte e seguros de acidentes de trabalho. O seguro de vida em caso de morte cobre o risco de morte da pessoa segura. O seguro de acidentes de trabalho salvaguarda os riscos dos trabalhadores no exercício da sua atividade profissional. Estamos, portanto, perante dois riscos com comportamentos opostos. No primeiro, o risco está presente na mortalidade da população segura, enquanto no segundo, o risco intrínseco é o de longevidade, isto é, dos pensionistas viverem mais tempo do que o esperado, o que terá consequências no valor das responsabilidades assumidas pelas empresas de seguros com produtos com benefícios de longo prazo em caso de vida.

Este trabalho pretende desenvolver tábuas dinâmicas de mortalidade, com e sem distinção por sexo, adaptadas às populações de seguros de vida em caso de morte e de seguros de acidentes de trabalho.

O objetivo último passa por estabelecer um modelo de referência para cada modalidade de seguros e que permita avaliar/validar os pressupostos de mortalidade considerados pelas empresas de seguros. O modelo, para cada tipologia de seguro, resulta de uma ponderação entre a tábua de referência construída a partir dos dados das empresas de seguros supervisionadas pela ASF e a mortalidade da população segura de cada empresa de seguros. A ponderação é atribuída consoante critérios definidos e que distinguem as empresas de seguros. A análise casuística não se enquadra no âmbito da dissertação, sendo que apenas será apresentada uma possível abordagem dos critérios a considerar.

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No capítulo 2 é descrita uma breve revisão da literatura acerca dos avanços no estudo da mortalidade. No capítulo 3 são apresentados os modelos teóricos utilizados para a construção da tábua de mortalidade dinâmica, modelo Poisson Lee-Carter, bem como modelos relacionais que permitem o estudo da mortalidade para as populações de seguros em estudo. No capítulo 4 apresentam-se os resultados da aplicação dos modelos descritos no capítulo 3 primeiro aplicados

à população portuguesa e posteriormente através dos modelos relacionais aplicados às populações de seguros de vida em caso de morte e à população de pensionistas de seguros de acidentes de trabalho. Ainda neste capítulo é realizada uma comparação dos modelos criados com as tábuas mais comuns. Por último, no capítulo 5 salientam-se as conclusões e sugestões de trabalhos futuros. Em anexo são apresentados os coeficientes resultantes da aplicação do modelo Poisson Lee-Carter abordados no capítulo 4.

REVISÃO DA LITERATURA

A modelação da mortalidade humana é um tema muito abordado na literatura e com bastante importância para os demógrafos e atuários. De facto, existem inúmeros modelos que visam modelar as tendências da mortalidade e que permitem responder a problemáticas atuais como o envelhecimento populacional e o aumento da esperança média de vida.

A primeira tentativa para modelar matematicamente a mortalidade data de 1725 e foi proposta por De Moivre que assumia que o número de mortes se ajustava a uma distribuição uniforme. Cem anos mais tarde, em 1825, Gompertz assumiu que a força de mortalidade apresenta um crescimento exponencial. Foram ainda propostos outros modelos por Makeham (1860) e praticamente um século depois, em 1939, por Weibull (Pascariu, 2018). Contudo, estes modelos são estáticos e descrevem a mortalidade num momento específico no tempo. No entanto, a mortalidade evolui com o tempo.

Até aos anos 80 do século passado os modelos matemáticos utilizados para prever taxas de mortalidade ou esperança de vida eram relativamente simples e envolviam alguma análise subjetiva. Nas últimas décadas foram desenvolvidas novas abordagens para modelar e prever a mortalidade através da utilização de modelos estocásticos como Alho (1990), Lee e Carter (1992), entre outros.

Lee e Carter (1992) propuseram um modelo estocástico para modelar a mortalidade que combina o efeito do tempo e da idade. O modelo foi aplicado à população dos Estados Unidos da América utilizando as taxas centrais de mortalidade e consiste num método extrapolativo, isto é, tem por base dados históricos e os padrões etários da mortalidade e que permite descrever a mortalidade com recurso a apenas um índice. Este índice é projetado através de um modelo de previsão de séries temporais e permite a obtenção de intervalos de confiança para o parâmetro estimado. Aplicando o método de decomposição em valores singulares obtém-se uma solução de mínimos quadrados e cujo resultado se

ajustou ao padrão de mortalidade da população em estudo. O método foi considerado pioneiro e dos mais influentes nas previsões das taxas de mortalidade (Janssen, 2018).

Lee (1990) aplicou o método Lee-Carter à população dos Estados Unidos, Canadá e Chile e propôs algumas extensões ao modelo original, de salientar a desagregação por sexo que consiste na aplicação do modelo de forma independente a homens e mulheres.

A partir deste modelo foram desenvolvidas outras variantes do modelo Lee-Carter por forma a melhorar a qualidade de ajustamento. Com ênfase para Brouhns et al. (2002) que propuseram modelar o número de mortes como uma variável aleatória com distribuição Poisson. Os parâmetros foram estimados por máxima verosimilhança e o modelo foi aplicado à população Belga tendo sido considerada a desagregação por sexo. A variável dependente do tempo foi projetada com recurso a um modelo ARIMA o que permitiu prever as taxas de mortalidade. Foi ainda aplicado um modelo relacional tipo Brass (Brass, 1974) para projetar a mortalidade para a população de pensionistas desse país.

Renshaw e Haberman (2006) incluíram o efeito cohort, isto é, do ano de nascimento, no modelo Lee-Carter e aplicaram à população de Inglaterra e País de Gales. Concluíram que o modelo captou as características das tendências de mortalidade provocadas pela idade, ano civil e ano de nascimento, o que se revelou um bom ajustamento. Apesar do processo de estimação dos parâmetros estar mais dificultado dada a inserção de outro termo bilinear, o modelo tornou-se também mais flexível por estudar o efeito dos três fatores (modelo Age-Period-Cohort) nas tendências de mortalidade. Os autores concluíram que a inclusão do efeito geracional traduz melhores projeções desde que aplicados a países em que se verifique impacto do efeito cohort.

Cairns et al. (2006) propuseram um modelo estocástico cujas iniciais dos nomes dos autores lhe dão nome, sendo denominado CBD. O modelo foi aplicado à população de Inglaterra e País de Gales e inclui dois fatores estocásticos para descrever a tendência da mortalidade: um afeta a mortalidade para todas as idades de igual maneira; o outro tem impacto na mortalidade proporcional à idade.

Dada a variabilidade da mortalidade para as idades mais avançadas foram desenvolvidos modelos para fechar as tábuas de mortalidade, são exemplos o método Denuit-Goderniaux e o método Coale-Kisker. O primeiro (Denuit & Goderniaux, 2005) estabelece um modelo log-quadrático às observações respeitantes às idades mais avançadas e fixam duas restrições que impõem o formato côncavo da curva de mortalidade nestas idades bem como a existência de uma tangente horizontal no ponto correspondente à idade biológica máxima definida à partida. O segundo método (Coale & Kisker, 1990) assume que a variação exponencial da taxa de mortalidade para idades avançadas não é constante mas decresce linearmente. Estes e outros modelos de fecho de tábuas foram estudados por Coelho et al. (2008) e concluíram que o método Denuit-Goderniaux apresenta melhores resultados.

A literatura centrada no estudo da mortalidade é vasta. Os modelos discutidos anteriormente são utilizados para modelar e projetar a mortalidade das populações. As empresas de seguros, pelas características particulares dos seus produtos, têm também

interesse em estudar a mortalidade do setor segurador em que se inserem. No entanto, atendendo à dimensão insuficiente das bases de dados inerentes ao setor segurador, nomeadamente número de anos e dimensão populacional reduzidos, a aplicação dos métodos mencionados anteriormente fica inviabilizada. Deste modo foram desenvolvidos modelos que pudessem relacionar a mortalidade de duas populações. Destaca-se aqui Brouhns et al. (2002) que relacionaram a mortalidade da população belga com a da população de fundos de pensões desse país com recurso a um modelo relacional tipo-Brass, que consiste em relacionar a log-mortalidade das populações através de uma função linear.

Delwarde et al. (2004), mencionaram e aplicaram alguns modelos relacionais nomeadamente o modelo relacional tipo-Brass e o modelo de Riscos Proporcionais de Cox (Cox, 1972) que relaciona as mortalidades através de um fator de proporcionalidade independente da idade.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentam-se de seguida modelos matemáticos que permitem uma abordagem dinâmica da mortalidade, com distinção por género, para as populações de seguros de vida em caso de morte e de acidentes de trabalho. Pela pertinência do trabalho, os modelos em estudo são o modelo Poisson Lee-Carter, que permite a construção da tabela de mortalidade dinâmica, o modelo Denuit-Goderniaux para o fecho da tabela; sendo a população portuguesa o objeto da sua aplicação. De forma a relacionar a mortalidade portuguesa com a das populações de seguros consideradas optou-se pelos modelos relacionais tipo-Brass e de riscos proporcionais de Cox.

3.1 Modelo Poisson Lee-Carter

O modelo Poisson Lee-Carter (Brouhns et al., 2002) é uma extensão do modelo Lee-Carter para modelar e projetar a mortalidade.

Lee e Carter (1992) desenvolveram um método extrapolativo que permite modelar e projetar a mortalidade com base na análise histórica da mesma. Esta metodologia consiste em ajustar um modelo demográfico aos dados da mortalidade e, com recurso a modelos de séries temporais, modelar a tendência temporal do nível de mortalidade e posteriormente projetá-lo.

Inicialmente é necessário definir a taxa central de mortalidade de um indivíduo com idade x no ano t , $m_{x,t}$, como o quociente entre o número de indivíduos com idade x que morrem durante o ano t , $d_{x,t}$, e o número de indivíduos expostos ao risco com idade x no ano t , $E_{x,t}$, ou seja,

$$m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}}.$$

O método define-se pela representação log-bilinear da taxa central de mortalidade,

$m_{x,t}$,

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t}, \quad (3.1)$$

em que:

α_x - representa o nível médio das taxas de mortalidade no tempo, para cada idade;

β_x - descreve o padrão dos desvios por faixa etária das taxas de mortalidade, ou seja, permite concluir a variação de $m_{x,t}$ de acordo com a variação de k_t ;

k_t - traduz as tendências temporais dos níveis de mortalidade;

$\epsilon_{x,t}$ - erro aleatório com média 0 e variância σ_ϵ^2 .

Como a parametrização não é única, é necessário impor restrições para obter soluções únicas na estimação dos parâmetros.

$$\begin{aligned} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x &= 1 \\ \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} k_t &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

No modelo Lee-Carter, para obter estimativas dos parâmetros resolve-se o problema de otimização por forma a minimizar $\sum_{x,t} (\ln m_{x,t} - \alpha_x - \beta_x k_t)^2$ através da aplicação do método da decomposição em valores singulares obtendo-se a solução dos mínimos quadrados.

Brouhns et al. (2002) propuseram uma extensão do modelo Lee-Carter por considerarem que o número de mortes podia ser descrito por uma variável aleatória que segue uma distribuição Poisson, isto é,

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(\mu_{x,t} E_{x,t}),$$

com $\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)$.

Os parâmetros continuam sujeitos às restrições definidas em (3.2) e são estimados pelo método da máxima verosimilhança.

A função log-verosimilhança é dada por

$$\ell(\alpha, \beta, \mathbf{k}) = \sum_{x,t} (d_{x,t}(\alpha_x + \beta_x k_t) - E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)) + c, \quad (3.3)$$

c uma constante.

O termo $\beta_x k_t$ presente em (3.3) não permite a aplicação de um modelo linear generalizado. Os autores do modelo aplicaram o método iterativo de Goodman (baseado no algoritmo de Newton-Raphson) que em cada iteração procura convergir para a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro a estimar.

O método consiste, de forma geral, na iteração $v + 1$ estimar o parâmetro θ enquanto os restantes se mantêm fixos, ou seja,

$$\hat{\theta}^{(v+1)} = \hat{\theta}^{(v)} - \frac{\partial \ell^{(v)} / \partial \theta}{\partial^2 \ell^{(v)} / \partial \theta^2} \quad (3.4)$$

em que $\ell^{(v)} = \ell^{(v)}(\hat{\theta}^{(v)})$.

Aplicando ao presente caso, pretende-se estimar α_x , β_x e k_t . Começa-se por definir os valores iniciais $\hat{\alpha}_x^{(0)} = 0$, $\hat{\beta}_x^{(0)} = 1$ e $\hat{k}_t^{(0)} = 0$ (sugestão dos autores) e a atualização dos parâmetros decorre da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_x^{(v+1)} &= \hat{\alpha}_x^{(v)} + \frac{\sum_t [d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(v)} + \hat{\beta}_x^{(v)} \hat{k}_t^{(v)})]}{\sum_t E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(v)} + \hat{\beta}_x^{(v)} \hat{k}_t^{(v)})} \\ \hat{k}_t^{(v+1)} &= \hat{k}_t^{(v)} + \frac{\sum_x [d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\beta}_x^{(v)} \hat{k}_t^{(v)})] \hat{\beta}_x^{(v)}}{\sum_x [E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\beta}_x^{(v)} \hat{k}_t^{(v)})] (\hat{\beta}_x^{(v)})^2} \\ \hat{\beta}_x^{(v+1)} &= \hat{\beta}_x^{(v)} + \frac{\sum_t [d_{x,t} - E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\beta}_x^{(v)} \hat{k}_t^{(v+1)})] \hat{k}_t^{(v+1)}}{\sum_t [E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\beta}_x^{(v)} \hat{k}_t^{(v+1)})] (\hat{k}_t^{(v+1)})^2}\end{aligned}\tag{3.5}$$

O critério de paragem consiste num pequeno incremento (da ordem de grandeza de 10^{-10}) da função log-verosimilhança.

As estimativas obtidas através do método de máxima verosimilhança não garantem o cumprimento das restrições (3.2) e, conseqüentemente, é necessário considerar a reparametrização

$$k_t^* = (\hat{k}_t - \bar{\mathbf{k}}) \sum_x \hat{\beta}_x \quad \text{e} \quad \beta_x^* = \frac{\hat{\beta}_x}{\sum_x \hat{\beta}_x},$$

com $\bar{\mathbf{k}}$ é a média aritmética de k_t .

É ainda necessário verificar a igualdade

$$\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t = \alpha_x^* + \beta_x^* k_t^*$$

pelo que se deduz que

$$\alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{\mathbf{k}}.$$

No modelo Poisson Lee-Carter, ao contrário do modelo original, não é necessário re-estimar k_t tendo em conta que a estimativa por máxima verosimilhança da função log-verosimilhança garante a igualdade entre o número de mortes ocorridas e as estimadas.

À semelhança do que ocorre no modelo Lee-Carter, a projeção da tendência temporal da mortalidade é obtida considerando um modelo ARIMA, que resulta da aplicação da metodologia Box-Jenkins (ver Hyndman e Athanasopoulos (2018)). Esta metodologia permite determinar o modelo que melhor descreve o parâmetro k_t para posteriormente o projetar.

Desta forma é possível obter as probabilidades de morte considerando

$${}_t q_x = 1 - \exp(-\mu_x(t)), \text{ com } \mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*)$$

e k_t^* o parâmetro temporal projetado resultante da aplicação do modelo ARIMA.

3.2 Método Denuit-Goderniaux

De acordo com Coelho et al. (2008), estudos sobre o comportamento da mortalidade nas idades avançadas (isto é, idades superiores a 85 anos) realizados em diversos países concluem que para estas idades se observa uma desaceleração da taxa de crescimento da mortalidade. Como o modelo Poisson Lee-Carter não produz bons resultados para as idades mais avançadas devido à parca informação, revela-se necessário adotar um método que descreva as taxas de mortalidade nestas idades e que traduza a desaceleração da taxa de crescimento. Destacam-se métodos como Denuit e Goderniaux (2005) e Coale e Kisker (1990) para o fecho de tábuas de mortalidade.

O método Denuit-Goderniaux, segundo Bravo (2007), é o que traduz melhor o comportamento da mortalidade.

O método desenvolvido por Denuit e Goderniaux (2005) impõe restrições ao fecho da tábua para os quocientes de mortalidade e consiste no ajustamento, pelo método dos mínimos quadrados, do modelo log-quadrático

$$\ln \hat{q}_x = a + bx + cx^2 + \epsilon_x, \epsilon_x \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.6)$$

às idades mais avançadas e para cada ano t , sujeito a duas restrições

$$\begin{aligned} q_{x_{max}} &= 1 \\ q'_{x_{max}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

com q'_x a primeira derivada de q_x para a idade x e x_{max} a idade limite.

As restrições impõem à curva q_x uma forma côncava e a existência de tangência horizontal na idade x_{max} . A segunda restrição permite que não haja um decréscimo nas probabilidades de morte para as idades mais avançadas.

A primeira restrição limita a vida humana a uma idade máxima (ou limite). A existência de uma idade máxima não reúne unanimidade por parte da comunidade científica, nesse sentido a seleção de uma idade biológica máxima é subjetiva e, no contexto do trabalho, foi definida consoante a modalidade de seguros. Dadas as características distintas entre os seguros abordados, assumiu-se os 100 anos para seguros de vida em caso de morte tendo em conta que este tipo de seguro está associado na sua maioria a garantia de crédito à habitação e os 120 anos para seguros de acidentes de trabalho por se tratar de um produto com benefícios de longo prazo, em caso de vida.

Os autores do método demonstram que sujeitando (3.6) às restrições (3.7) e com manipulação algébrica resulta o modelo

$$\ln \hat{q}_x = (x_{max} - x)^2 c + \epsilon_x, \epsilon_x \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.8)$$

A idade a partir do qual se substitui as estimativas brutas \hat{q}_x pelos valores provenientes do modelo (3.6) é definida de maneira a maximizar o coeficiente de determinação da regressão, R^2 . Desta forma, repetiu-se o processo iterativo que implementa (3.8) para o

intervalo de idades $x \in [65, x_0]$, para diferentes valores da "idade de corte", x_0 , no intervalo $[70, 85]$. A idade x_0 que maximiza o R^2 da regressão entre as estimativas obtidas pelo modelo para cada valor de x_0 e as estimativas brutas \hat{q}_x constitui a "idade de corte" a considerar.

Os autores destacam a possível necessidade de alisar \hat{q}_x em torno da idade de corte para evitar descontinuidades na vizinhança desse ponto, por exemplo, através da utilização de médias geométricas de 5 anos.

3.3 Modelos Relacionais

Quando os dados da população em estudo são insuficientes para aplicar as metodologias apresentadas, torna-se necessário recorrer a modelos relacionais que procuram estabelecer uma relação entre o comportamento de duas variáveis que, para o presente estudo, é a mortalidade entre a população portuguesa e a população que se pretende estudar.

A ideia consiste em encontrar uma função $f(\mu_x)$ que relacione a mortalidade da população em estudo com a da população de referência, μ_x^{ref} . Neste estudo considerou-se como população de referência a população portuguesa em geral.

De seguida são apresentados dois modelos relacionais: o modelo relacional tipo-Brass, aplicado por Brouhns et al. (2002) e o modelo de riscos proporcionais de Cox aplicado por Delwarde et al. (2004).

Para este trabalho será considerado o modelo que apresentar melhor poder explicativo.

3.3.1 Modelo Relacional tipo-Brass

O modelo relacional tipo-Brass (Brass, 1974) assenta na ideia de encontrar uma relação linear entre a mortalidade de duas populações, a de referência, $\mu_{x,t}^{ref}$ e a população em estudo, da forma

$$f(\mu_{x,t}) = a + b f(\mu_{x,t}^{ref}). \quad (3.9)$$

A função $f(\cdot)$ pressupõe uma transformação da mortalidade que pode ser logarítmica (abordada por Brouhns et al., 2002), ou logit (proposta pelo autor do método) sendo que os parâmetros são estimados através de uma regressão linear.

Para projetar a mortalidade para a população em estudo considera-se que a relação (3.9) se mantém válida com o decorrer do tempo e para todas as idades.

No contexto do trabalho desenvolvido foram analisadas ambas as funções e a função logarítmica foi a que apresentou melhores resultados. Nesse caso é possível obter a mortalidade para as populações em estudo através de uma manipulação algébrica de (3.9) considerando a função logarítmica da forma

$$\mu_{x,t} = \exp(a) \cdot \left(\mu_{x,t}^{ref} \right)^b. \quad (3.10)$$

3.3.2 Modelo de Riscos Proporcionais de Cox

O modelo de riscos proporcionais de Cox (Cox, 1972) postula que a taxa de mortalidade da população em estudo é proporcional à da população de referência e o fator de proporcionalidade é independente da idade, o que se traduz na relação

$$\mu_{x,t} = \theta \mu_{x,t}^{ref}, \quad (3.11)$$

em que $\mu_{x,t}^{ref}$ é a força de mortalidade da população de referência. O parâmetro θ é estimado pela aplicação de uma regressão linear.

Neste modelo também se assume que a relação é válida ao longo do tempo e para todas as idades.

APLICAÇÃO

Neste capítulo são aplicadas as metodologias descritas no capítulo 3, com recurso ao *software* R (versão 3.5.1), sendo que as bibliotecas utilizadas encontram-se apresentadas no Anexo I. Os dados da exposição ao risco e número de mortes da população portuguesa encontram-se disponíveis na base de dados “Human Mortality Database” (s.d.) (consultar metainformação dos dados no Anexo II). Para este estudo considerou-se a informação entre 1970 e 2018.

4.1 Modelo Poisson Lee-Carter

Numa primeira fase foi aplicado o modelo Poisson Lee-Carter à população portuguesa, com e sem distinção por sexo, para as idades compreendidas entre 0 e os 85 anos ($x \in [0, 85]$) e para os anos $t \in [1970, 2018]$. Para estimar os parâmetros pelo método de máxima verosimilhança recorre-se ao método iterativo de Goodman concretizado no algoritmo (3.5). As estimativas dos parâmetros $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$ e \hat{k}_t encontram-se representadas na figura 4.1 e os respetivos valores encontram-se no Anexo III.

A curva descrita pelo parâmetro $\hat{\alpha}_x$ apresenta a forma expectável, isto é, a taxa de mortalidade média acentuada no primeiro ano de vida (por morte súbita e outras patologias não detetadas durante o período gestacional (Nogueira et al., 2013)) que decresce rapidamente com a idade atingindo o mínimo aos 14 anos e posteriormente aumenta gradualmente com a idade.

Para valores mais elevados de $\hat{\beta}_x$, que se observam em idades jovens, verifica-se alterações de forma marcada na taxa de mortalidade para estas idades.

As estimativas de $\hat{\beta}_x$ positivas para todas as idades nos casos considerados aliadas à tendência decrescente e praticamente linear do índice temporal \hat{k}_t traduz uma diminuição das taxas de mortalidade com o passar dos anos.

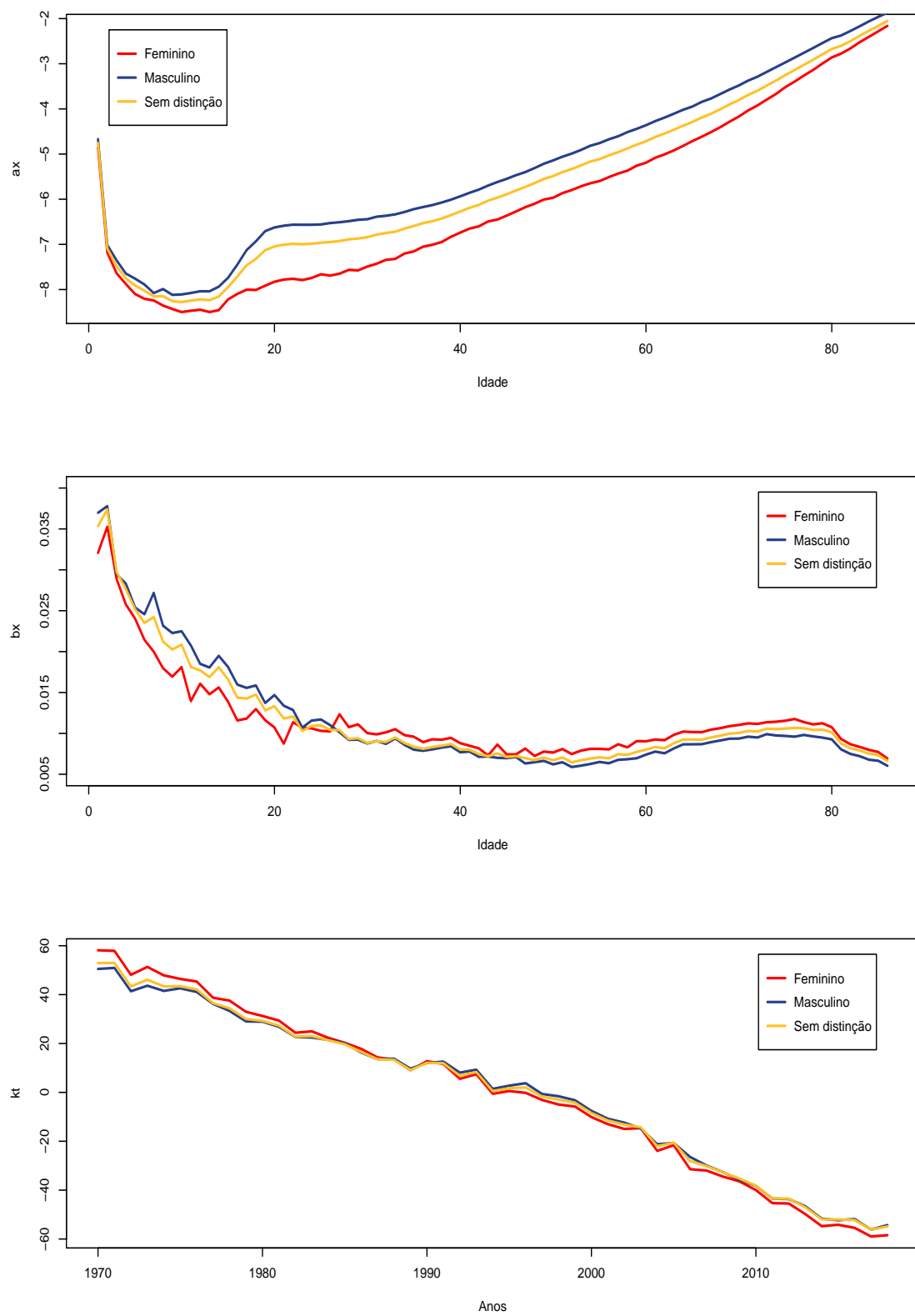


Figura 4.1: Estimativa dos parâmetros do modelo Poisson Lee-Carter

4.2 Extrapolação da tendência temporal

Posteriormente pretende-se extrapolar a tendência temporal do parâmetro \hat{k}_t para os casos em estudo. Para isso é necessário determinar os parâmetros do modelo ARIMA e como tal aplica-se a metodologia de Box-Jenkins à série temporal $\{\hat{k}_t\}$. A metodologia Box-Jenkins permite selecionar um modelo ARIMA adequado, ajustá-lo aos dados e utilizar o modelo ajustado para previsão da tendência temporal da série (ver Hyndman e Athanasopoulos (2018)).

Da aplicação da metodologia decorre que o modelo ARIMA(1,1,0) é o que melhor descreve a tendência temporal para cada um dos casos em análise e é da forma

$$k_t - k_{t-1} = c + \phi k_{t-1} + \epsilon_t. \quad (4.1)$$

As estimativas dos parâmetros do modelo encontram-se disponíveis na tabela 4.1. A análise dos valores p-value permite constatar que todos os parâmetros são significativos para o nível de significância 0.05.

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros do modelo ARIMA(1,1,0) with drift

Sexo	Parâmetro	Estimativa	p-value
Feminino	μ	-2.46994	<2.2e-16
	ϕ	-0.60676	9.571e-08
Masculino	μ	-2.22604	<2.2e-16
	ϕ	-0.43525	0.00109
Sem distinção	μ	-2.28765	<2.2e-16
	ϕ	-0.52415	2.439e-05

Desta forma é possível projetar a série temporal para o futuro, isto é, $\{\tilde{k}_{2018+u} : u = 1, 2, \dots\}$. Os valores foram projetados para um horizonte temporal de 30 anos, isto é, de 2018 até 2048.

De referir que, tendo em conta que para projetar o parâmetro k_t se assume uma tendência que pode não se verificar a longo prazo, então, por prudência, o horizonte temporal de projeção escolhido foi de apenas 30 anos.

Considerando a projeção de k_t é possível obter tábuas de mortalidade prospetivas atendendo a

$$\tilde{\mu}_{x,2018+u} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \tilde{k}_{2018+u}), \quad u = 1, 2, \dots, 30.$$

Para cada um dos casos em estudo obtém-se uma matriz com os valores projetados da mortalidade resultante da aplicação do modelo Poisson Lee-Carter, em que cada coluna representa um ano de projeção e em linha as idades.

A figura 4.2 ilustra as curvas da mortalidade portuguesa para os anos 1970, 2000, 2020 e 2040 e permite visualizar a evolução da mortalidade para a população portuguesa.

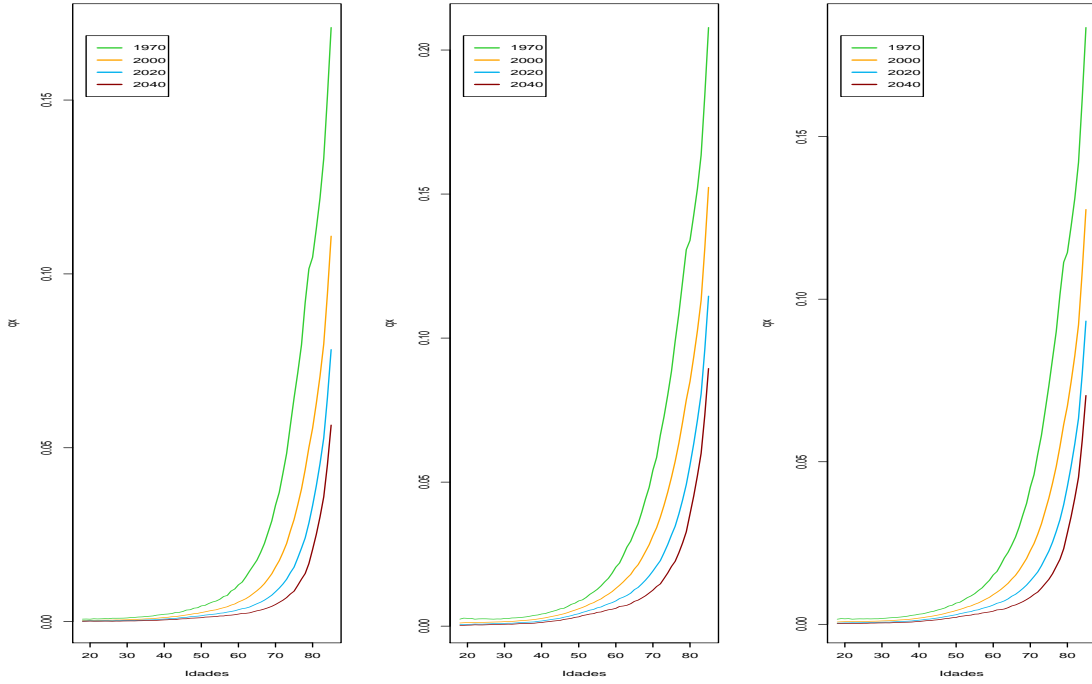


Figura 4.2: Evolução da probabilidade de morte para a população portuguesa (sexo feminino à esquerda, masculino ao meio e sem distinção à direita)

Tal como era de esperar verifica-se que a mortalidade da população portuguesa acompanha a tendência do aumento da esperança de vida, no sentido em que se verifica, para uma determinada idade, ao longo dos anos, que a probabilidade de morte diminui.

4.3 Método Denuit-Goderniaux

Nesta secção foi utilizado o método de Denuit e Goderniaux para o fecho das tábuas. Definiu-se a idade biológica máxima consoante a modalidade de seguros considerada. No caso dos seguros de vida em caso de morte assumiu-se os 100 anos dado o público-alvo deste tipo de seguros. Para os seguros de acidentes de trabalho definiu-se como idade biológica máxima os 120 anos, para ambos os sexos, por se terem verificado óbitos para idades superiores aos 110 anos. Apesar de não se verificar um número relevante de supercentenários e não se justificar o largo espectro de idades para todas as tipologias de seguros, a idade limite considerada justifica-se dado que a esperança de vida tem vindo a aumentar e a idade limite é válida para o horizonte temporal de projeção.

O método de Denuit e Goderniaux assenta nos quocientes de mortalidade e consiste no ajustamento do modelo log-quadrático dado por (3.8), ou seja, para cada ano t da amostra e para as idades compreendidas entre os 65 e os 85 anos tem-se

$$\ln \hat{q}_{x,t} = (x_{max} - x)^2 c(t) + \epsilon_x(t), \quad \epsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2(t)), \quad x_{max} = \{x_{max_{SCM}}, x_{max_{AT}}\}$$

sujeito às restrições $q_{x_{max}} = 1$ e $q'_{x_{max}} = 0$.

Inicialmente determina-se a idade de corte, x_0 , isto é, a idade a partir da qual se substitui os quocientes de mortalidade pelos valores resultantes do modelo de fecho, maximizando o coeficiente de determinação R^2 da regressão para as idades compreendidas entre os 70 e os 85 anos. Os valores obtidos para o coeficiente de determinação das regressões foi superior a 0.99 pelo que para todos os casos em estudo foi considerado os 85 anos como idade de corte.

Depois de juntar os quocientes de mortalidade resultantes do modelo PLC e projetados com os gerados pelo método de fecho torna-se necessário alisar a série $\{\hat{q}_x\}$ em torno da idade de corte utilizando médias geométricas de ordem 5, isto é, recalculando $\hat{q}_{x,t}$, $x \in [80, 90]$ tal que

$$\hat{q}_{x,t}^* = (\hat{q}_{x-2} \cdot \hat{q}_{x-1} \cdot \hat{q}_x \cdot \hat{q}_{x+1} \cdot \hat{q}_{x+2})^{1/5} \quad (4.2)$$

Posteriormente, através de modelos relacionais serão obtidas tábuas prospetivas para os seguros de vida em caso de morte e para seguros de acidentes de trabalho.

4.4 Modelo Relacional

No capítulo que se segue serão aplicados modelos relacionais às populações de determinadas carteiras de produtos das empresas de seguros nacionais pelo que no fim será possível obter tábuas de mortalidade prospetivas para as populações em estudo partindo das tábuas de mortalidade prospetivas para a população portuguesa em geral.

Os dados utilizados nesta secção relativos a seguros de vida em caso de morte e de acidentes de trabalho foram disponibilizados pela ASF para o período 2003-2018.

4.4.1 Seguros de Vida em Caso de Morte

O seguro de vida em caso de morte (SCM) obriga a seguradora ao pagamento do capital seguro ao beneficiário em caso de morte da pessoa segura. Este tipo de seguros está associado maioritariamente a seguros temporários como garantia das operações de crédito à habitação.

Pela análise da base de dados é possível verificar erros no reporte da informação que podem ser consequência de atrasos na comunicação entre os bancos e as empresas de seguros no que diz respeito à morte dos clientes que obtiveram créditos à habitação. Outra possibilidade de erro reside na fórmula de cálculo do fator de exposição ao risco que assenta na hipótese de que o fluxo de entradas e saídas é uniforme ao longo do ano (*Relatório do Setor Segurador e dos Fundos de Pensões, 2008*). A existência de erros nos dados influencia os resultados e a interpretação do comportamento da mortalidade.

Pela análise da figura 4.3, verifica-se, no período compreendido entre 2008 e 2013, um decréscimo da dimensão da população exposta aos seguros de vida em caso de morte, consequência da crise financeira e que estabilizou nos anos subsequentes.

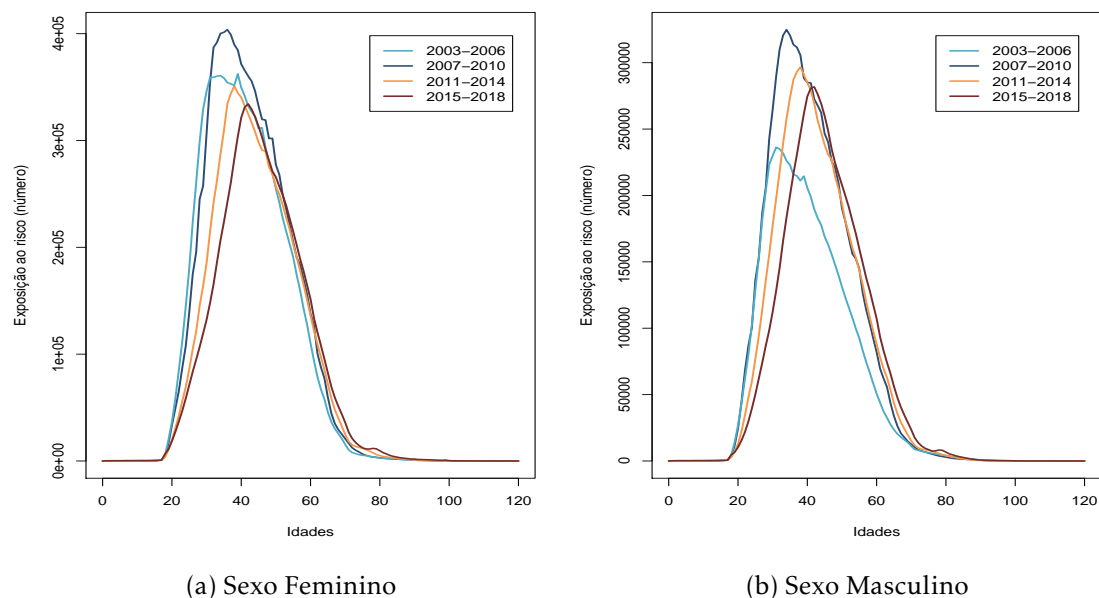


Figura 4.3: População de Seguros de Vida em Caso de Morte

Noventa e nove por cento da população de seguros de vida em caso de morte exposta ao risco concentra-se na faixa etária dos 18 aos 85 anos, para ambos os sexos, com média na faixa etária 40-45 anos.

Verifica-se a maturação da população de SCM ao longo dos anos, que culmina na translação da curva da exposição ao risco para a faixa etária 40-45 anos. Relativamente à população segura do sexo masculino, pode-se concluir a forte captação de homens para a carteira do período 2003-2006 para 2007-2010.

É ainda de salientar que a população feminina constitui aproximadamente 58% da carteira e, atendendo aos diferentes comportamentos da mortalidade entre sexos justifica-se a sua desagregação.

Por forma a obter a mortalidade para a população de seguros de vida em caso de morte foi aplicado o modelo relacional tipo-Brass e o modelo de riscos proporcionais de Cox. Os modelos foram aplicados aos dados reportados pelas empresas de seguros referentes aos anos 2003 a 2018, para as idades entre os 18 e os 85 anos e considerando todos os casos em estudo (feminino, masculino e sem distinção por sexo).

Na tabela 4.2 encontram-se as estimativas dos parâmetros do modelo relacional tipo-Brass.

Tabela 4.2: Estimativas dos parâmetros do modelo relacional tipo-Brass

Parâmetro	Estimativa		
	Feminino	Masculino	Sem distinção
a	-2.3805	-3.2128	-2.6090
b	0.6288	0.6986	0.6834

Considerando a equação (3.10) é possível obter a mortalidade para a população de seguros de vida em caso de morte partindo do pressuposto que esta se mantém válida ao longo do tempo e para cada idade. O resultado do ajustamento encontra-se na figura 4.4.

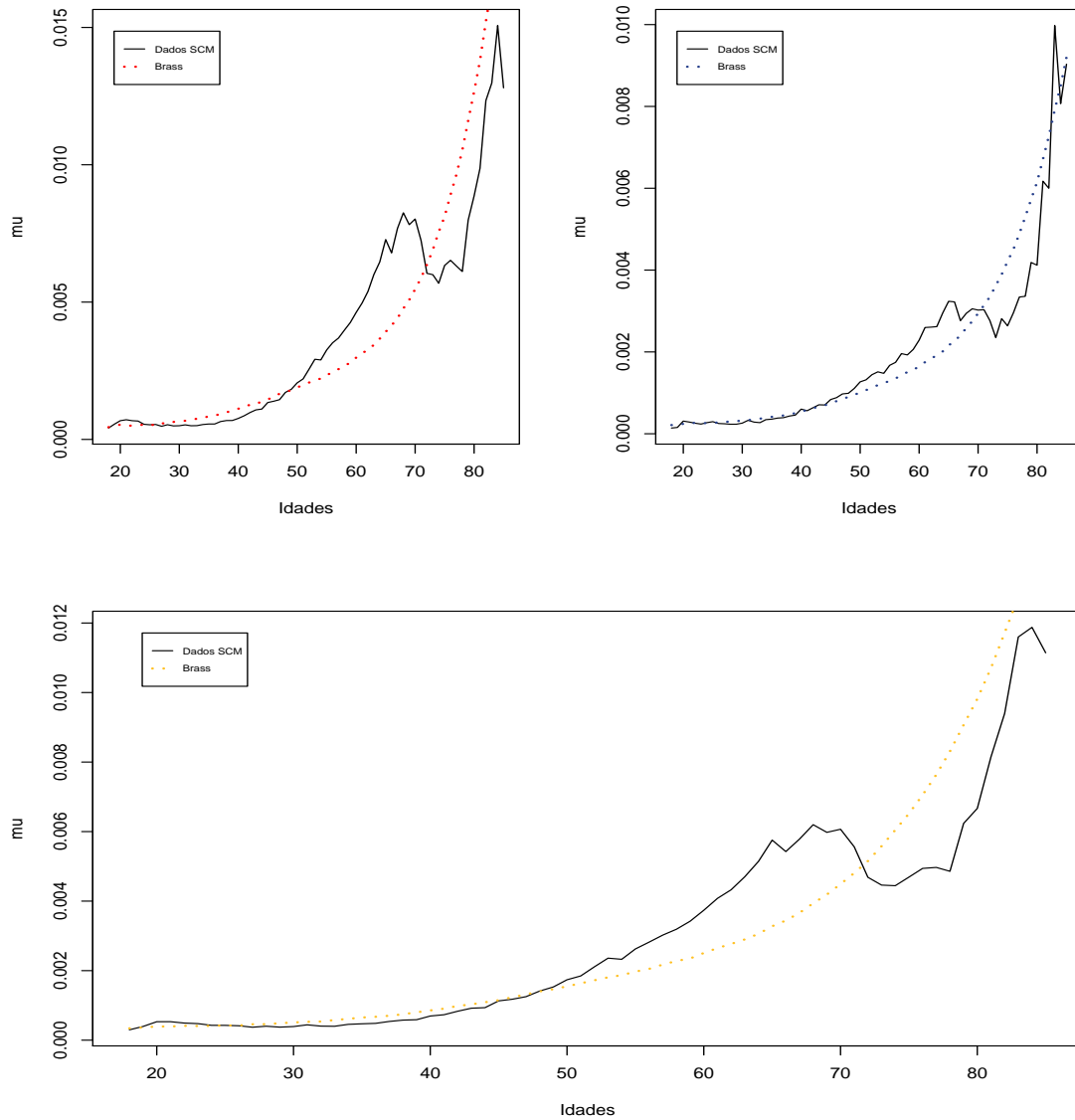


Figura 4.4: Mortalidade SCM ajustada pelo modelo relacional tipo-Brass (sexo feminino em cima, à esquerda, masculino em cima, à direita e sem distinção em baixo)

O melhor ajustamento verifica-se para o sexo masculino. Para o sexo feminino e sem distinção por sexo existem períodos de sobrestimação e períodos de subestimação mais evidentes comparativamente com o que se observa para o sexo masculino. De referir, contudo, a possibilidade de existirem erros no reporte da informação bem como a existência de pouca informação para as idades na faixa etária dos 75 aos 85 anos, e que podem provocar situações anómalas que influenciam a capacidade de ajustamento do modelo.

Os resultados da aplicação do modelo de riscos proporcionais de Cox encontram-se na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros do modelo de riscos proporcionais de Cox

Parâmetro	Feminino	Estimativa	
		Masculino	Sem distinção
θ	0.2188	0.0818	0.1497

A expressão (3.11) permite determinar a mortalidade para a população de seguros de vida em caso de morte assumindo que esta se mantém válida ao longo do tempo e para cada idade e cujo resultado do ajustamento se encontra na figura 4.5.

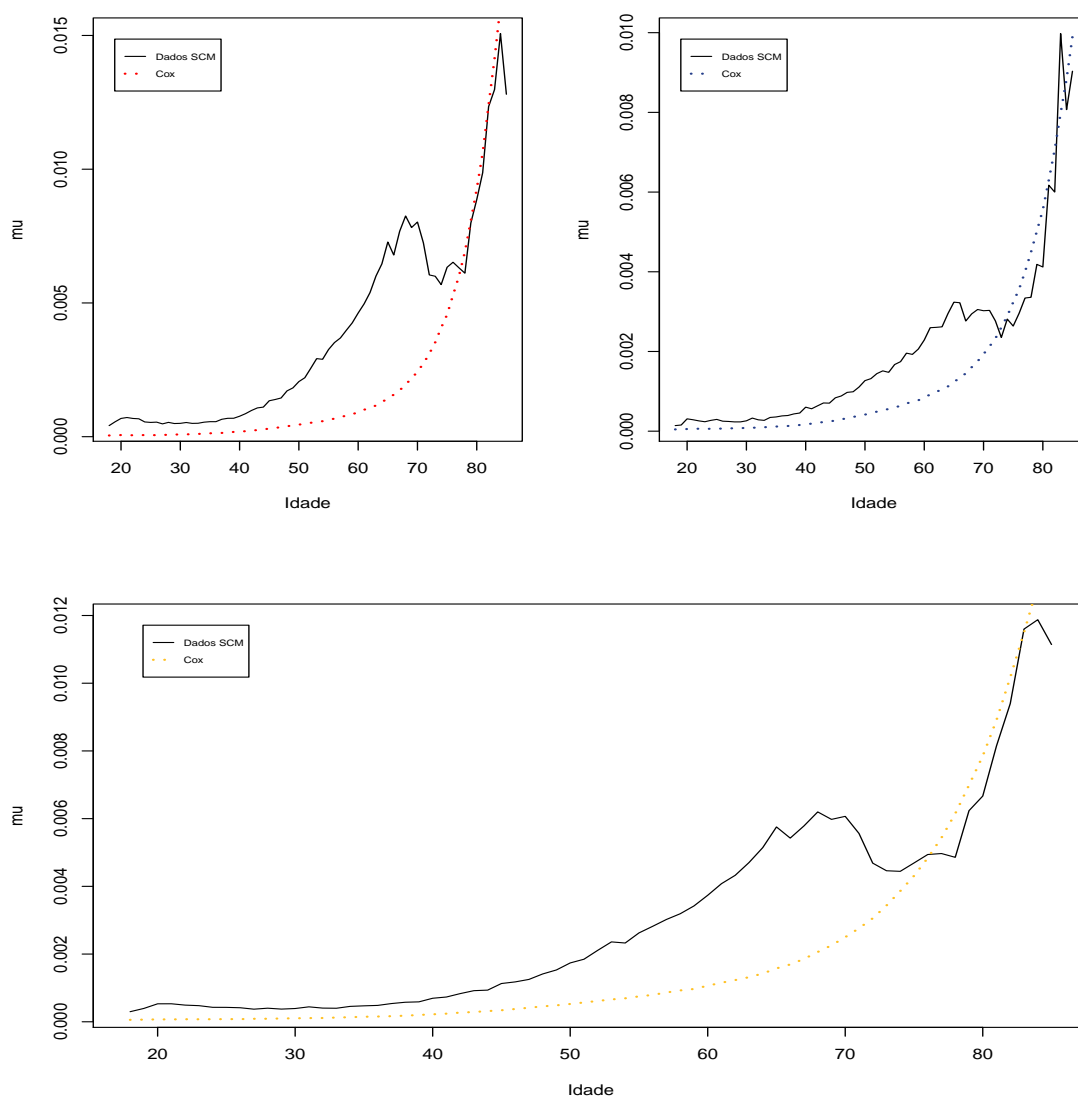


Figura 4.5: Mortalidade SCM ajustada pelo modelo de Riscos Proporcionais de Cox (sexo feminino em cima, à esquerda, masculino em cima, à direita e sem distinção em baixo)

Pela análise da figura conclui-se que o modelo de riscos proporcionais de Cox tem grande poder explicativo na faixa etária dos 75 a 85 anos. No entanto, o modelo subestima a mortalidade de seguros de vida em caso de morte até aos 75 anos em comparação com a mortalidade observada.

Devido ao exposto e comparando o ajustamento proporcionado pelos modelos testou-se a junção destes, quer considerando a média entre os dois quer considerando o modelo relacional tipo-Brass para as idades até aos 70 anos e o modelo de riscos proporcionais de Cox para as idades a partir dos 75 anos. Para as idades entre os 70 e os 75 anos e com vista a manter a forma característica da curva da mortalidade juntou-se os modelos através de uma função quadrática e posteriormente alisou-se a série em torno dos pontos de corte para suavizar a curva. O resultado da junção pode ser observado na figura 4.6.

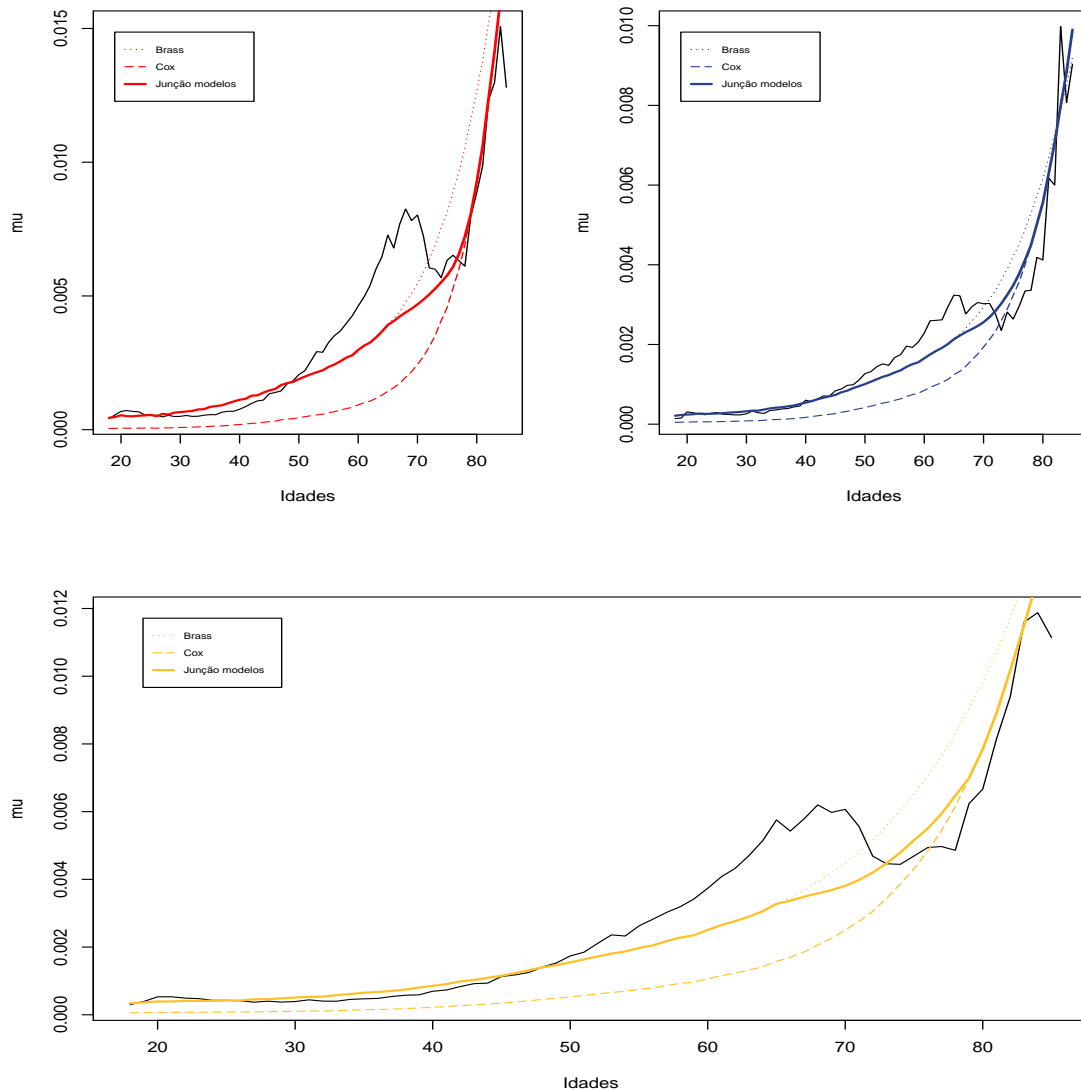


Figura 4.6: Modelo Relacional SCM (sexo feminino em cima, à esquerda, masculino em cima, à direita e sem distinção em baixo)

Pelo facto de se considerar anómalo o comportamento da mortalidade para as idades a partir dos 70 anos e ainda dado que os modelos que resultaram da aplicação dos modelos relacionais subestimam a mortalidade para a faixa etária dos 40 aos 60 anos, que constitui aproximadamente 50% da população em estudo, revela-se necessário repetir os modelos relacionais de forma a que traduzam o comportamento da mortalidade nestas idades.

Uma vez mais foram aplicados os modelos relacionais tipo-Brass e de riscos proporcionais de Cox considerando agora as idades compreendidas entre os 40 e os 60 anos.

A tabela 4.4 contém as estimativas dos coeficientes dos modelos relacionais aplicados à faixa etária dos 40 aos 60 anos.

Tabela 4.4: Estimativas dos parâmetros dos modelos relacionais aplicados às idades 40-60

Parâmetro	Feminino	Estimativa	
		Masculino	Sem distinção
a	1.1195	-2.0305	-0.1118
b	1.1789	0.8890	1.1053
θ	0.2188	0.0818	0.1497

Através das expressões (3.10) e (3.11) determina-se a mortalidade de seguros de vida em caso de morte resultante do modelo relacional tipo-Brass e modelo de riscos proporcionais de Cox, respetivamente, partindo do pressuposto que as fórmulas se mantêm válidas ao longo do tempo e para cada idade. O resultado do ajustamento pode ser analisado na figura 4.7.

Para cada caso em estudo, o modelo foi escolhido tal que minimizasse o erro. Desta forma e ainda pela análise dos ajustamentos da figura 4.7 conclui-se que para o sexo feminino e sem distinção por sexo, o modelo com melhor poder explicativo é o modelo de riscos proporcionais de Cox. No caso do sexo masculino, o modelo com melhor poder explicativo é o modelo relacional tipo-Brass.

Assim, a partir das tábuas de mortalidade prospetivas obtidas para a população portuguesa e do modelo relacional escolhido para cada caso em estudo, é possível obter tábuas de mortalidade prospetivas para a população de seguros de vida em caso de morte.

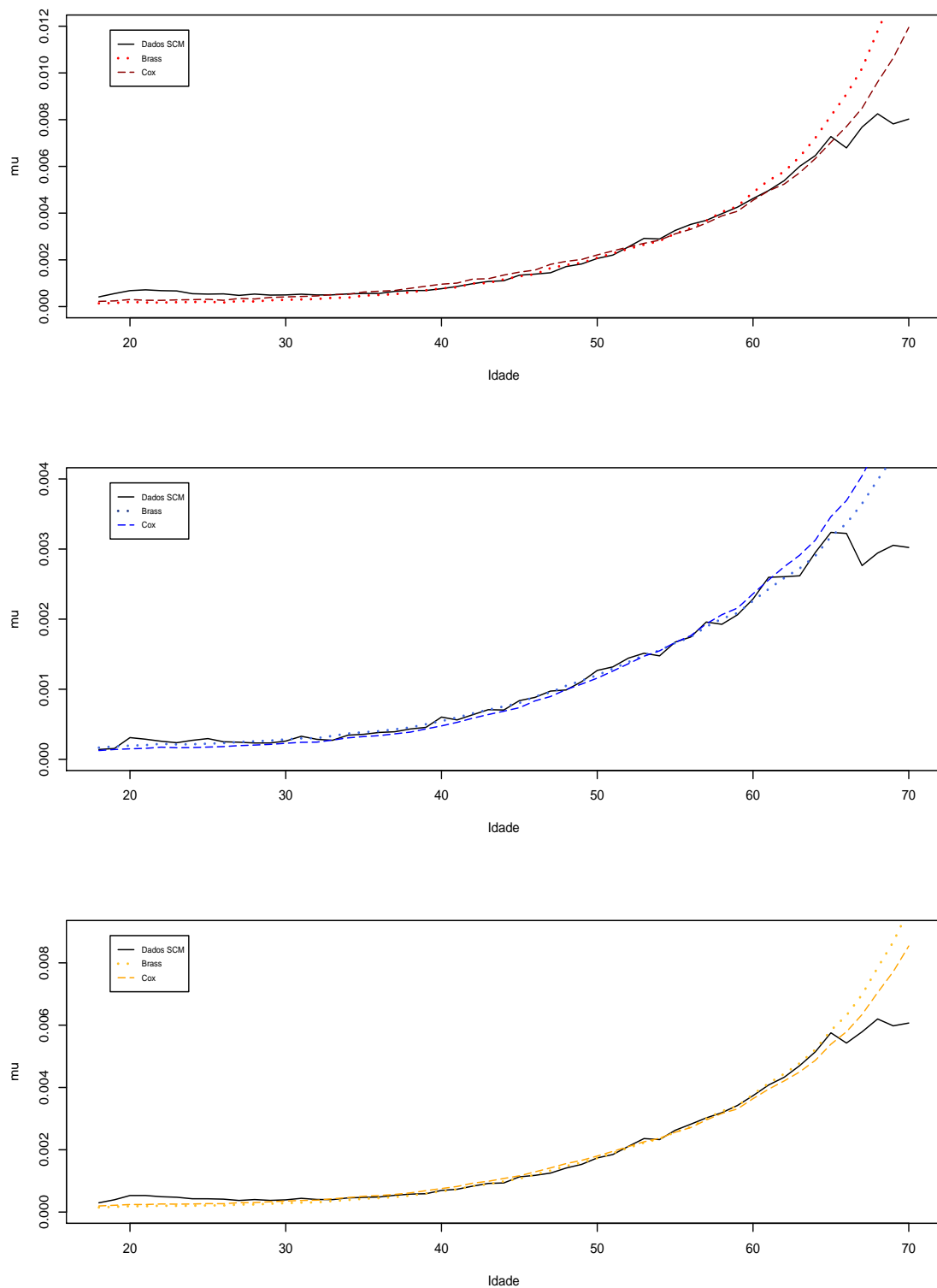


Figura 4.7: Modelos relacionais aplicados à mortalidade de SCM (sexo feminino em cima, masculino ao meio e sem distinção em baixo)

4.4.1.1 Comparação de Tábuas de Mortalidade

Tendo em conta que cada empresa de seguros adota para cada classe de risco uma tábua de mortalidade torna-se premente comparar as tábuas mais comuns com a mortalidade de SCM no período de 2003 a 2018 e com a tábua estática resultante da aplicação do modelo relacional.

O gráfico que se encontra de seguida permite comparar o modelo criado para descrever a tendência da mortalidade de SCM com as tábuas de mortalidade estáticas frequentemente utilizadas no setor segurador português. A curva que descreve o modelo é referente ao caso sem distinção por sexo.

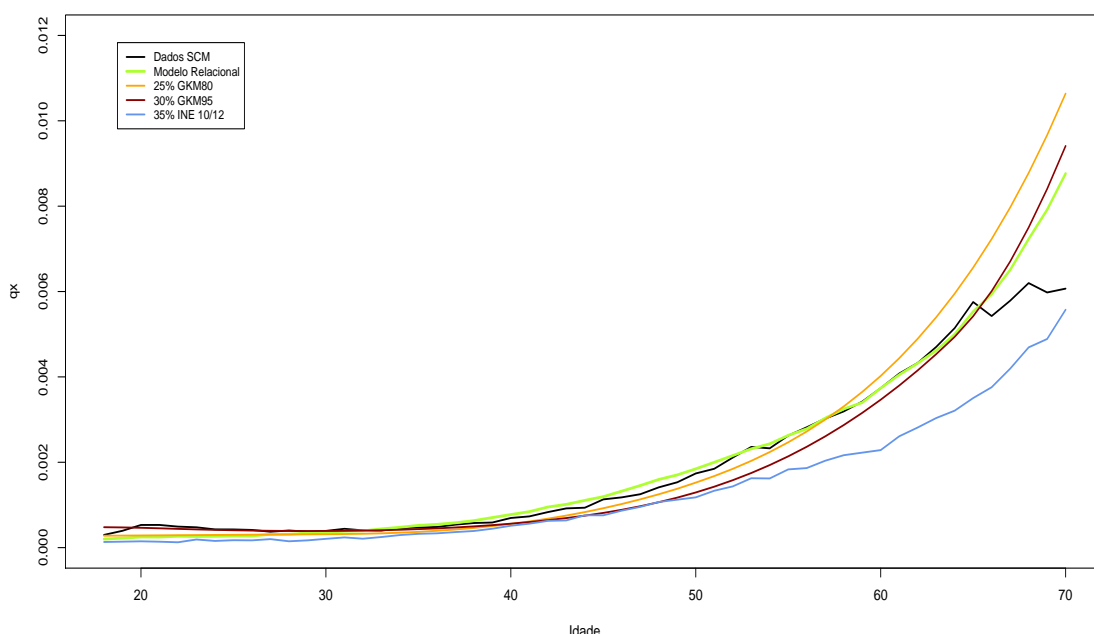


Figura 4.8: Comparação de tábuas utilizadas em SCM

As percentagens consideradas de cada uma das tábuas em estudo resultam de um valor médio das percentagens consideradas pelas empresas de seguros.

Pela análise da figura 4.8, considerar 35% da tábua INE 10/12 revela-se inadequado tendo em conta que subestima a mortalidade observada em toda a extensão de idades. Observa-se que, para qualquer uma das tábuas em análise, o modelo relacional é o que se ajusta melhor à mortalidade de SCM.

Tendo em consideração que a melhor estimativa deve refletir o valor esperado dos fluxos de caixa necessários para fazer face às responsabilidades inerentes a esta tipologia de produtos, a adequada estimativa dos custos com sinistros associados às mortes esperadas torna-se fundamental. Assim, do ponto de vista prático, considerar uma tábua de mortalidade dinâmica que acautela os avanços da esperança de vida pode revelar-se essencial para obter uma estimativa realista e apropriada.

4.4.2 Acidentes de Trabalho

O seguro de acidentes de trabalho (AT) garante o pagamento de uma pensão ou prestação regular em caso de lesão, invalidez ou morte da pessoa segura como consequência de um acidente de trabalho. Em caso de invalidez, a seguradora fica obrigada ao pagamento de uma pensão vitalícia à pessoa segura.

De acordo com a *Lei n.º 98/2009 de 4 de setembro*, que controla o regime de reparação de acidentes de trabalho e de doenças profissionais, define-se como acidente de trabalho "aquele que se verifique no local e no tempo de trabalho e produza directa ou indirectamente lesão corporal, perturbação funcional ou doença de que resulte redução na capacidade de trabalho ou de ganho ou a morte".

Os gráficos da figura 4.9 permitem visualizar o número de pessoas expostas ao risco da população de pensionistas de acidentes de trabalho no período 2003 a 2018 resultante da agregação dos dados das empresas de seguros.

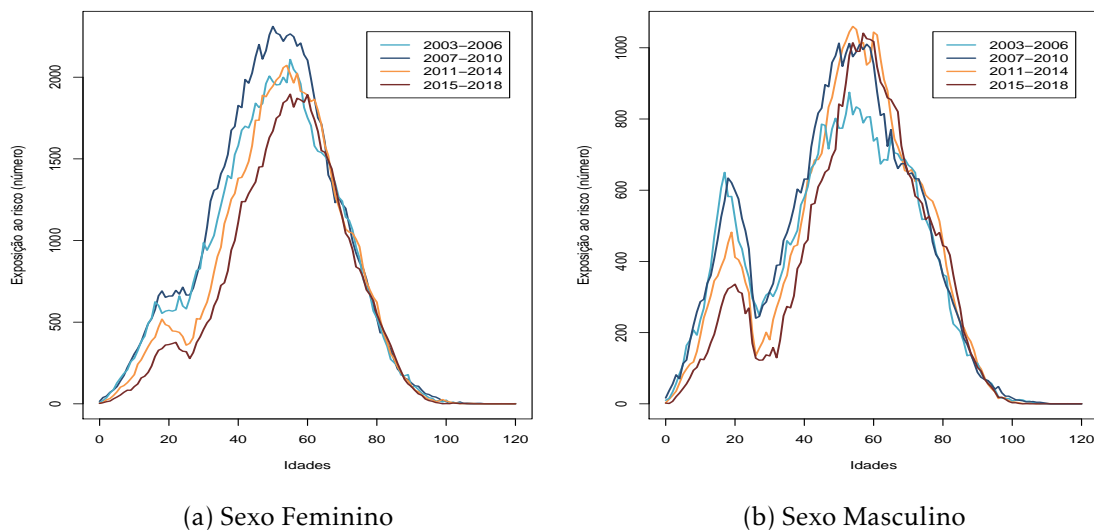


Figura 4.9: População de Pensionistas de Seguros de Acidentes de Trabalho

Observa-se uma diminuição da exposição ao risco na faixa etária dos vinte anos, mais acentuada no sexo masculino, por consequência do *terminus* do pagamento das pensões de orfandade após a conclusão do percurso escolar.

Com o decorrer dos anos verifica-se um aumento da idade média (ponderada pelo número de pessoas expostas ao risco) de 50 anos em 2003 para 54 anos em 2018 para o sexo feminino e 51 anos em 2003 para 56 anos em 2018 no sexo masculino.

À semelhança do estudo da mortalidade de seguros de vida em caso de morte, também aqui se distingue o estudo da mortalidade consoante o sexo tendo em conta os comportamentos diferentes da mortalidade.

Para os diferentes casos em estudo foram testados o modelo relacional tipo-Brass e o modelo de riscos proporcionais de Cox. O estudo da mortalidade dos pensionistas de

acidentes de trabalho tem por base os dados históricos relativos ao período entre 2003 e 2018, englobando as idades compreendidas entre os 18 e os 100 anos.

A figura 4.10 permite analisar o ajustamento dos modelos relacionais à população de pensionistas de AT para os três casos em estudo, isto é, sexo feminino, masculino e sem distinção por sexo, considerando as idades compreendidas entre os 18 e os 80 anos.

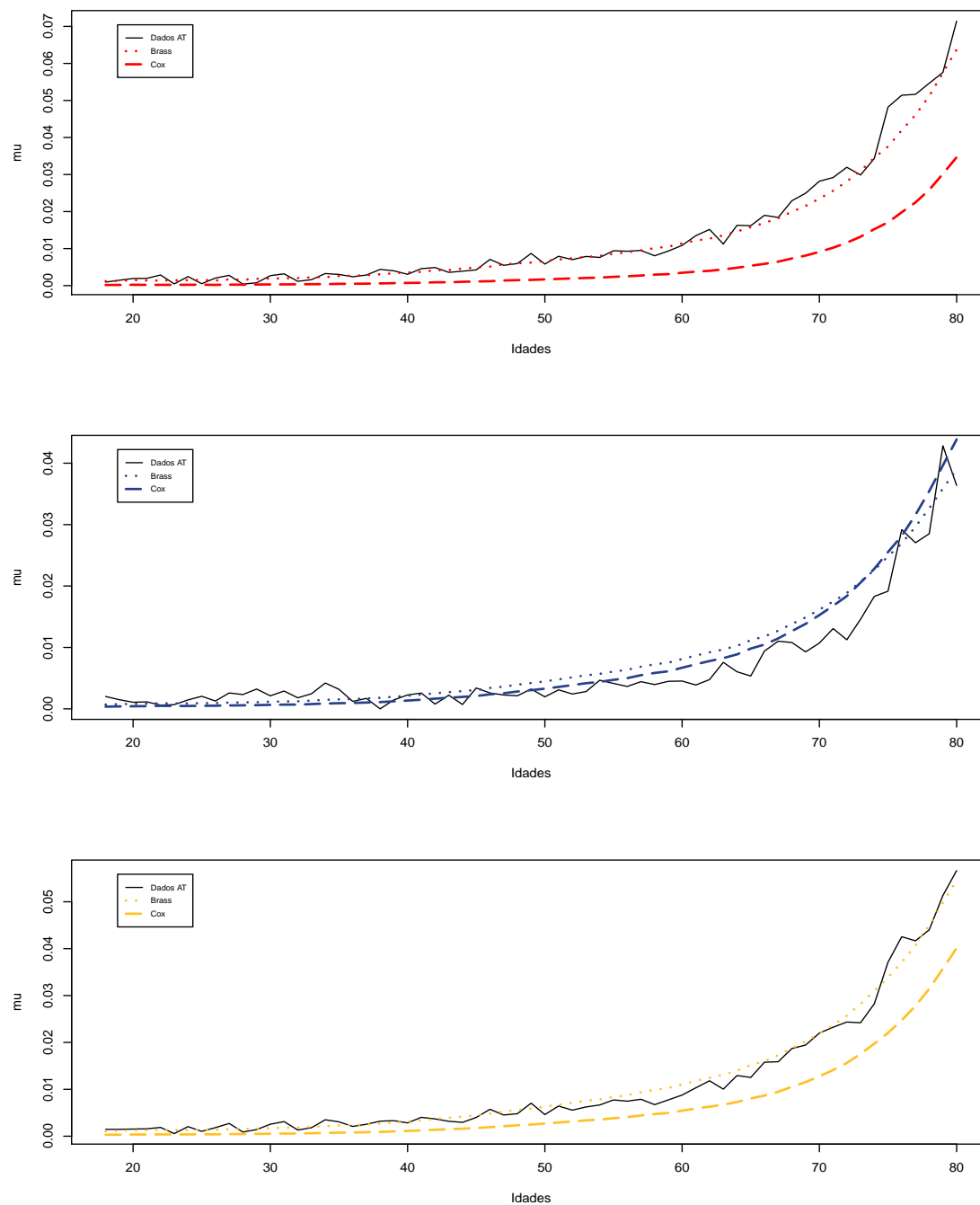


Figura 4.10: Modelos relacionais aplicados à mortalidade de AT, 18-80 anos (sexo feminino em cima, masculino ao meio e sem distinção em baixo)

A análise dos resultados divide-se consoante o modelo que melhor se ajusta aos dados da mortalidade observada para os pensionistas de acidentes de trabalho e que minimiza o erro.

Para o sexo feminino e para o caso sem distinção por sexo, o melhor ajustamento ocorre com a aplicação do modelo relacional tipo-Brass para todas as idades dos pensionistas de acidentes de trabalho. As estimativas dos parâmetros do modelo relacional tipo-Brass são indicadas na tabela 4.5, para o sexo feminino e sem distinção de sexo.

Tabela 4.5: Parâmetros do modelo relacional tipo-Brass - sexo feminino e sem distinção

Parâmetro	Estimativa	
	Feminino	Sem distinção
a	-0.3904	-0.5516
b	0.7472	0.7991

A curva da mortalidade para a população feminina de seguro de acidentes de trabalho e para a população no coletivo tendo por base o modelo relacional tipo-Brass obteve-se considerando a equação (3.10) e os parâmetros da tabela 4.5, partindo do pressuposto que a equação se mantém válida ao longo do tempo e para cada idade.

No caso do sexo masculino, o modelo de riscos proporcionais de Cox produz um ajustamento adequado aos dados particularmente para as idades entre os 80 e os 100 anos. Ainda assim, o modelo de riscos proporcionais de Cox é o que melhor se ajusta à mortalidade observada para todas as idades.

O parâmetro θ que permite obter a curva da mortalidade para a população de pensionistas do sexo masculino de acidentes de trabalho através da expressão (3.11) encontra-se na tabela 4.6, considerando que a equação se mantém válida ao longo do tempo e para cada idade.

Tabela 4.6: Parâmetros do modelo de riscos proporcionais de Cox - sexo masculino

Parâmetro	Estimativa Masculino
θ	0.6466

Através dos parâmetros presentes nas tabelas 4.5 e 4.6 é possível obter tábuas de mortalidade prospetivas partindo das tábuas prospetivas construídas para a população portuguesa em geral.

4.4.2.1 Comparação de Tábuas de Mortalidade

As tábuas de mortalidade mais comuns para determinar as responsabilidades de AT são as tábuas francesas TV 73/77 e TV 88/90 e tábua 2016-2018 do INE.

De seguida são comparadas essas tábuas com a tendência estática da mortalidade para AT no período 2003-2018, para o caso sem distinção por sexo.

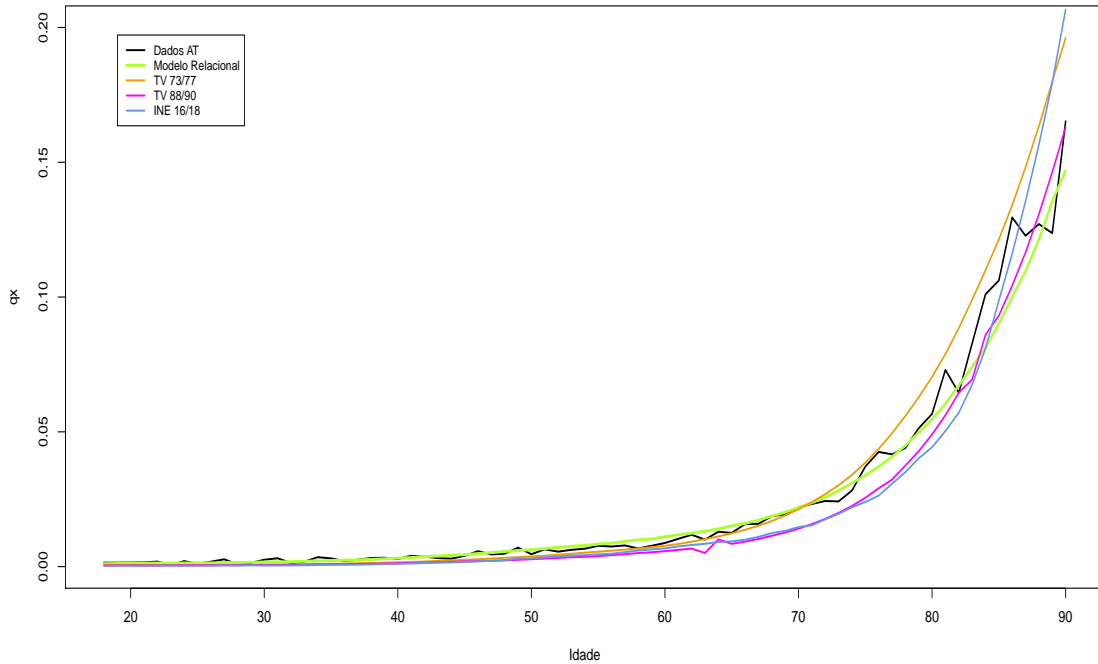


Figura 4.11: Comparação de tábuas utilizadas em seguros de Acidentes de Trabalho

As tábuas consideradas nas figura 4.11 ajustam-se adequadamente à mortalidade observada. Apesar disto é importante reforçar a ideia de que se observa uma tendência do aumento da esperança de vida e, nesse sentido, pode revelar-se imprudente considerar tábuas estáticas uma vez que não acompanham a evolução temporal da mortalidade.

A título de exemplo e por forma a auxiliar a compreensão dos gráficos calculou-se o valor atuarial de anuidades vitalícias utilizando as diferentes tábuas especificamente para o caso sem distinção por sexo.

O cálculo da renda vitalícia de uma unidade monetária (1 u.m.) para tábuas de mortalidade dinâmica é conseguido através da fórmula

$$a_x^{[t]} = \sum_{k \geq 1} \left(\prod_{j=1}^k v_j \right) \cdot {}_k p_x^{[t]}, \text{ com } {}_k p_x^{[t]} = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}(t+j),$$

em que v_j é o fator de atualização no período j e ${}_k p_x^{[t]}$ é a probabilidade de um indivíduo (x) sobreviver k anos tendo como ano de referência o ano t .

O ano de referência do cálculo é 2020 e foi utilizada como taxa de desconto a estrutura temporal da taxa de juro da Autoridade Europeia dos Seguros e Pensões Complementares de Reforma (EIOPA), consultada em junho de 2020.

Salienta-se que, para todas as idades, a tábua de mortalidade dinâmica construída para seguros de acidentes de trabalho é o pressuposto mais prudente a considerar. Tome-se como exemplo a idade média da população de pensionistas de acidentes de trabalho,

51 anos. Para esta idade o valor atuarial da renda é 27,53 unidades monetárias, que representa um aumento de 7,7%, 0,2% e 1,4% relativamente ao valor determinado pelas tábuas TV73/77, TV88/90 e INE 2016/2018, respetivamente.

Os resultados corroboram a vantagem de se adotar uma tábua de mortalidade dinâmica. Apesar da diferença de valores entre a tábua de mortalidade dinâmica e a tábua TV88/90 ser bastante reduzida, esta pode revelar-se desajustada no futuro pelo facto de ter sido criada há cerca de 30 anos e não acompanhar a tendência da mortalidade.

4.5 Tabelas de Contingência

Tendo em consideração que a população segura de cada empresa terá características distintas consoante a sua seleção de carteira, entende-se pertinente na determinação dos pressupostos de mortalidade de cada empresa incluir igualmente informação do seu histórico de mortalidade, assumindo a seguinte expressão

$$q_x^* = (1 - y) \cdot q_x^{rel} + y \cdot q_x^{ES}, \quad (4.3)$$

em que y corresponde a um fator de credibilidade não superior a 50%, q_x^{rel} é a probabilidade de morte de um indivíduo (x) determinada pelo modelo relacional da população segura em estudo e q_x^{ES} é a probabilidade de morte de um indivíduo (x) para a população de uma empresa de seguros (fruto do seu histórico de mortalidade).

De forma a determinar o fator de credibilidade y , definem-se alguns critérios que se consubstanciam numa tabela de contingência. Este fator pretende avaliar a qualidade da informação histórica da empresa e também identificar as empresas de seguros que têm especificidades nas suas carteiras.

Assim, os critérios que permitem identificar a credibilidade e pertinência dos dados históricos da empresa são os seguintes:

- número de anos de reporte com informação relevante;
- dimensão da carteira (como percentagem da carteira global de um tipo de seguros). Informação reduzida não permite conclusões realistas e completas;
- características específicas da carteira, isto é, tipo de negócio. Se as pessoas seguras de determinada empresa divergem da generalidade da população segura deste tipo de seguros, o modelo por si só pode não refletir essa especificidade, pelo que deve ser aumentado o fator de credibilidade a atribuir à informação da empresa.

O objetivo último consiste em estudar a adequabilidade dos pressupostos de mortalidade adotados por cada empresa de seguros, comparando-os com o resultado da implementação, caso a caso, da expressão (4.3). A análise casuística que se propõe não se enquadra no âmbito da dissertação, sendo uma sugestão de trabalho futuro.

CONCLUSÃO

Portugal tem registado aumentos na esperança de vida sendo a população portuguesa das mais envelhecidas nomeadamente da Europa. Esta realidade tem consequências para o setor segurador tendo em conta as implicações da longevidade na avaliação do risco relativo a cada pessoa segura. Os avanços verificados não são contemplados nas bases técnicas fixadas por cada empresa de seguros para cada modalidade de seguro. Neste sentido, as tábuas dinâmicas são importantes do ponto de vista prudencial dado que têm em conta a tendência da mortalidade ao longo dos anos de projeção.

O objetivo do trabalho foi construir um modelo que permitisse modelar a mortalidade de seguros de vida em caso de morte e de seguros de acidentes de trabalho.

O primeiro produto de seguros revelou-se um desafio tendo em conta a qualidade dos dados reportados e a forma atípica do comportamento da mortalidade que se observou nos dados de seguros de vida em caso de morte. A qualidade dos ajustamentos, para cada um dos casos estudados, é satisfatória uma vez que foi privilegiado o ajustamento às idades com maior massa crítica, dissipando desta forma os potenciais erros de reporte nas idades superiores a 70 anos. Face ao atual regime de Solvência, onde é estabelecido que a melhor estimativa deve corresponder ao valor esperado dos fluxos de caixa futuros, a consideração de pressupostos mais realistas é fundamental. Neste contexto, a utilização de tábuas de mortalidade que incorporem a tendência da evolução da mortalidade revela-se essencial e mais compreensível.

Nos seguros de acidentes de trabalho, atentos à duração das responsabilidades associadas, foi evidente o impacto que a adoção de tábuas prospetivas produz, revelando-se mais realista e mais prudente pelo facto de acautelarem os avanços da esperança de vida.

Apesar das tábuas de mortalidade dinâmicas extrapolarem a tendência da mortalidade e preverem a evolução com base no histórico da mortalidade é importante recordar que, quanto maior o horizonte temporal de projeção, maior a incerteza associada, pelo

que é recomendável adaptar o estudo realizado periodicamente.

Por último, importa referir que, dado o panorama atual e os desafios impostos pela pandemia Covid-19, é premente uma análise do seu efetivo impacto na mortalidade e longevidade. De facto, a pandemia pode ter causado mortes colaterais no sentido em que potenciou um fator de medo nas pessoas retraindo-as de procurar cuidados de saúde adiando assim o diagnóstico e tratamento de doenças. É ainda de salientar que a Covid-19 terá impacto na economia e consequentemente na atividade seguradora que se deverá adaptar a uma "nova normalidade" e exigirá a agilização de produtos adaptados às novas necessidades do tomador de seguros.

BIBLIOGRAFIA

- Alho, J. M. (1990). Stochastic methods in population forecasting. *International Journal of Forecasting*, 6(4), 521–530.
- Brass, W. (1974). Mortality models and their uses in demography. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 33, 123–132.
- Bravo, J. M. (2007). *Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: Modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade* (tese de doutoramento). Universidade de Évora. Évora.
- Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J. K. (2002). A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 373–393.
- Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 687–718.
- Coale, A. & Kisker, E. (1990). Defects in data on old age mortality in the united states: New procedures for calculating approximately accurate mortality and lifetables at the highest ages. *Asian and Pacific Population Forum*, 4, 1–31.
- Coelho, E., Bravo, J. & Magalhães, M. G. (2008). *Mortality and longevity projections for the oldest-old in portugal, Proceedings of the European Population Conference 2008, Barcelona, Spain*. <http://epc2008.princeton.edu/papers/80105>
- Cox, D. R. (1972). Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society*, 34(2), 187–220.
- Delwarde, A., Kachakhidze, D., Olie, L. & Denuit, M. (2004). Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnels en assurance sur la vie. *Bulletin Français D'Actuariat*, 6(12), 77–102.
- Denuit, M. & Goderniaux, A. (2005). Closing and projecting lifetables using log-linear models. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires*, 1, 29–49.
- FFMS. (s.d.). Esperança de vida à nascença: Total e por sexo (base: Triénio a partir de 2001). PORDATA. [https://www.pordata.pt/Portugal/Espan%5C%3%5C%a7a+de+vida+%5C%3%5C%a0+nascen%5C%3%5C%a7a+total+e+por+sexo+\(base+tri%5C%3%5C%a9nio+a+partir+de+2001\)-418](https://www.pordata.pt/Portugal/Espan%5C%3%5C%a7a+de+vida+%5C%3%5C%a0+nascen%5C%3%5C%a7a+total+e+por+sexo+(base+tri%5C%3%5C%a9nio+a+partir+de+2001)-418) [Acedido em 13 de julho de 2020]

- Human Mortality Database. (s.d.). University of California, Berkeley (USA), Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). www.mortality.org [Acedido em 09 de março de 2020]
- Hyndman, R. J. & Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: Principles and practice*, 2nd edition. OTexts: Melbourne, Australia. [OTexts.com / fpp2](http://OTexts.com/fpp2) [Acedido em 04 de fevereiro de 2020]
- INE. (2019). Estatísticas demográficas-2018. Instituto Nacional de Estatística.
- INE. (2020). Tábuas de mortalidade para Portugal 2017-2019. Instituto Nacional de Estatística.
- Janssen, F. (2018). Advances in mortality forecasting: Introduction. *Genus*, 74(21).
- Lee, R. (1990). The lee-carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal*, 4(1), 80–93.
- Lee, R. & Carter, L. (1992). Modeling and forecasting u.s. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), 659–671.
- Lei n.º 98/2009 de 4 de setembro. (2009). Diário da República n.º 172/09 - 1.ª série. Assembleia da República. Lisboa.
- Makeham, W. M. (1860). On the law of mortality and the construction of annuity tables. *The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries*, 8(6), 301–310.
- Nogueira, P. J., Costa, A. J., Rosa, M. V. & da Silva, J. R. (2013). *Estudo comparativo do número de óbitos e causas de morte da mortalidade infantil e suas componentes (2009-2012)* (rel. téc.). Direção Geral de Saúde.
- Pascariu, M. D. (2018). *Modelling and forecasting mortality* (tese de doutoramento). University of Southern Denmark. Odense, Denmark.
- Relatório do setor segurador e dos fundos de pensões* (rel. téc.). (2008). Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões.
- Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556–570.



BIBLIOTECAS DO R EMPREGUES

O trabalho foi realizado com recurso ao *software* R (versão 3.5.1) e foram utilizadas as bibliotecas a seguir mencionadas:

- demography (versão 1.22) - permite ler dados demográficos;
- ilc (versão 1.0) - permite aplicar o modelo PLC;
- forecast (versão 8.11) - projetar índice temporal k_t ;
- readxl (versão 1.1.0) - ler ficheiros excel.



METAINFORMAÇÃO DOS DADOS

II.1 Exposição ao Risco: por sexo, desde 1970 (população portuguesa)

Âmbito Geográfico: Portugal

Operação Estatística: Estatísticas de número de indivíduos expostos ao risco de morte

Período: 1970 a 2018

Periodicidade: Anual

Entidade Responsável: *Human Mortality Database* (HMD)

Conceitos

Nome	Descrição
Exposição ao risco	Número de indivíduos expostos ao risco de morte por idade e em cada ano civil

Série

Série	Unidade de Medida	Tipo de Valor	Escala	Nota
Sexo	Indivíduo	Valor absoluto	Nº	-

Notas:

Consultado em 09 de março de 2020.

Dados originais do site HMD contruídos a partir de dados do INE.

II.2 Taxa de Mortalidade: por sexo, desde 1970 (população portuguesa)

Âmbito Geográfico: Portugal

Operação Estatística: Estatísticas de taxas de mortalidade

Período: 1970 a 2018

Periodicidade: Anual

Entidade Responsável: *Human Mortality Database* (HMD)

Conceitos

Nome	Descrição
Taxa de mortalidade	Taxa de mortalidade por idade e em cada ano civil

Série

Série	Unidade de Medida	Tipo de Valor	Escala	Nota
Sexo	Indivíduo	Valor absoluto	Nº	-

Notas:

Consultado em 09 de março de 2020.

Dados originais do site HMD contruídos a partir de dados do INE.

A N E X O

ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DO MODELO PLC

Tabela III.1: Estimativas do parâmetro k_t do modelo PLC

Ano	Feminino	Masculino	Sem distinção	Ano	Feminino	Masculino	Sem distinção
1970	58,14563	50,50607	52,90225	1995	0,547407	2,741454	1,70446
1971	57,90723	50,91312	52,96734	1996	-0,19322	3,747305	2,01509
1972	48,09891	41,37281	43,36255	1997	-3,10133	-0,66953	-1,702
1973	51,33594	43,64058	46,08015	1998	-4,9666	-1,57908	-2,97366
1974	47,87388	41,5257	43,37613	1999	-5,80184	-3,22378	-4,21859
1975	46,41791	42,57865	43,41619	2000	-10,1061	-7,57632	-8,47698
1976	45,3658	41,09576	42,12903	2001	-13,0063	-10,7947	-11,5163
1977	38,70947	36,21436	36,51328	2002	-14,9633	-12,3951	-13,1801
1978	37,54976	33,32216	34,40715	2003	-14,6331	-14,7955	-14,2807
1979	32,9596	29,03336	30,00959	2004	-23,937	-21,2198	-21,9784
1980	31,25957	28,93783	29,25157	2005	-21,632	-20,6954	-20,6011
1981	29,37969	26,8325	27,31131	2006	-31,4296	-26,4251	-28,0728
1982	24,39357	22,68167	22,78187	2007	-31,9946	-29,9361	-30,1774
1983	24,96801	22,44952	23,0185	2008	-34,4699	-32,6776	-32,7383
1984	22,3082	21,49031	21,32551	2009	-36,4064	-35,6979	-35,2599
1985	20,28316	20,10399	19,69776	2010	-39,9834	-38,277	-38,1736
1986	17,81454	16,30319	16,55318	2011	-45,3176	-43,4698	-43,4298
1987	14,27648	13,60226	13,54544	2012	-45,4729	-43,6503	-43,4788
1988	13,4694	13,76777	13,30523	2013	-49,7822	-46,5818	-46,9917
1989	9,08646	9,705938	9,1604	2014	-54,7322	-51,6571	-51,9429
1990	12,75264	12,01614	12,09085	2015	-54,1761	-52,3134	-51,9849
1991	11,62861	12,56735	11,91792	2016	-55,4169	-51,8256	-52,2352
1992	5,536484	8,071789	6,776881	2017	-58,9656	-56,1751	-56,1806
1993	7,432031	9,282858	8,321444	2018	-58,4358	-54,3023	-54,8505
1994	-0,57625	1,434039	0,503146				

Tabela III.2: Estimativas dos parâmetros α_x e β_x do modelo PLC

Idade	Feminino		Masculino		Sem Distinção	
	α_x	β_x	α_x	β_x	α_x	β_x
0	-4,85521	0,03207	-4,66874	0,03697	-4,75238	0,03535
1	-7,18254	0,03526	-7,01379	0,03779	-7,09164	0,03740
2	-7,6401	0,02888	-7,35331	0,02944	-7,48154	0,02975
3	-7,87839	0,02577	-7,64569	0,02831	-7,75033	0,02763
4	-8,10046	0,02402	-7,7597	0,02538	-7,90979	0,02517
5	-8,20439	0,02144	-7,88747	0,02457	-8,02684	0,02351
6	-8,24219	0,01999	-8,07867	0,02718	-8,15007	0,02422
7	-8,35408	0,01798	-7,98865	0,02317	-8,14778	0,02123
8	-8,43017	0,01694	-8,11762	0,02227	-8,25609	0,02026
9	-8,49883	0,01810	-8,10886	0,02249	-8,27719	0,02085
10	-8,46978	0,01394	-8,07619	0,02075	-8,24475	0,01812
11	-8,44704	0,01608	-8,03872	0,01850	-8,21655	0,01770
12	-8,49831	0,01479	-8,0392	0,01806	-8,23579	0,01688
13	-8,45651	0,01562	-7,93726	0,01949	-8,15563	0,01809
14	-8,21983	0,01388	-7,74052	0,01813	-7,94546	0,01659
15	-8,09658	0,01158	-7,44882	0,01597	-7,71263	0,01439
16	-8,00327	0,01181	-7,12616	0,01556	-7,46154	0,01425
17	-8,00873	0,01297	-6,93288	0,01586	-7,32103	0,01475
18	-7,91474	0,01161	-6,70688	0,01372	-7,12823	0,01281
19	-7,82747	0,01072	-6,6247	0,01469	-7,04571	0,01332
20	-7,77908	0,00874	-6,58689	0,01338	-7,00662	0,01182
21	-7,76228	0,01137	-6,56372	0,01286	-6,98714	0,01208
22	-7,79022	0,01069	-6,5659	0,01071	-6,99718	0,01030
23	-7,74394	0,01061	-6,56503	0,01157	-6,98683	0,01091
24	-7,66212	0,01031	-6,55838	0,01170	-6,96392	0,01099
25	-7,69084	0,01025	-6,52737	0,01100	-6,94886	0,01043
26	-7,64939	0,01234	-6,5101	0,01014	-6,92635	0,01039
27	-7,5645	0,01076	-6,48593	0,00922	-6,88888	0,00932
28	-7,57606	0,01110	-6,45587	0,00923	-6,87089	0,00941
29	-7,49056	0,01004	-6,4426	0,00876	-6,84074	0,00883
30	-7,42835	0,00988	-6,38712	0,00907	-6,78517	0,00904
31	-7,34269	0,01013	-6,36682	0,00872	-6,74814	0,00895
32	-7,32206	0,01051	-6,33521	0,00938	-6,72053	0,00950
33	-7,20278	0,00979	-6,28259	0,00860	-6,65024	0,00883
34	-7,15546	0,00959	-6,22025	0,00801	-6,5932	0,00837
35	-7,05078	0,00893	-6,17314	0,00787	-6,52985	0,00811
36	-7,00868	0,00928	-6,12968	0,00805	-6,48718	0,00833
37	-6,94754	0,00923	-6,07261	0,00826	-6,42963	0,00849
38	-6,83248	0,00945	-6,01056	0,00843	-6,35119	0,00870
39	-6,73916	0,00881	-5,93563	0,00769	-6,27086	0,00803
40	-6,65113	0,00849	-5,85782	0,00778	-6,1903	0,00799
41	-6,60115	0,00817	-5,78704	0,00713	-6,12647	0,00747
42	-6,49249	0,00730	-5,69777	0,00717	-6,03169	0,00720

Tabela III.3: Estimativas dos parâmetros α_x e β_x do modelo PLC (continuação)

Idade	Feminino		Masculino		Sem Distinção	
	α_x	β_x	α_x	β_x	α_x	β_x
43	-6,44957	0,00864	-5,61879	0,00701	-5,96409	0,00755
44	-6,363	0,00743	-5,5487	0,00697	-5,88972	0,00712
45	-6,27155	0,00743	-5,46837	0,00711	-5,80631	0,00722
46	-6,17715	0,00815	-5,39926	0,00632	-5,72853	0,00698
47	-6,09952	0,00724	-5,31006	0,00648	-5,6442	0,00673
48	-6,00698	0,00778	-5,21455	0,00664	-5,54998	0,00704
49	-5,96698	0,00766	-5,14017	0,00621	-5,4872	0,00671
50	-5,86528	0,00809	-5,05867	0,00647	-5,39956	0,00705
51	-5,79738	0,00747	-4,98971	0,00589	-5,33161	0,00646
52	-5,71395	0,00789	-4,90885	0,00606	-5,25041	0,00672
53	-5,6469	0,00811	-4,81595	0,00626	-5,16669	0,00692
54	-5,5979	0,00811	-4,75699	0,00651	-5,11187	0,00708
55	-5,51069	0,00804	-4,67357	0,00635	-5,02796	0,00695
56	-5,43148	0,00867	-4,60596	0,00676	-4,95724	0,00746
57	-5,36774	0,00829	-4,51346	0,00684	-4,87538	0,00737
58	-5,25707	0,00905	-4,44094	0,00696	-4,79098	0,00774
59	-5,19114	0,00904	-4,36117	0,00740	-4,71738	0,00801
60	-5,08117	0,00925	-4,26963	0,00777	-4,62105	0,00834
61	-5,00613	0,00917	-4,19189	0,00757	-4,54545	0,00817
62	-4,91868	0,00983	-4,10663	0,00816	-4,461	0,00880
63	-4,8184	0,01021	-4,01865	0,00866	-4,37059	0,00925
64	-4,7119	0,01017	-3,94681	0,00867	-4,28851	0,00925
65	-4,6157	0,01014	-3,84436	0,00868	-4,19033	0,00923
66	-4,51357	0,01046	-3,76981	0,00893	-4,10782	0,00951
67	-4,40398	0,01064	-3,66997	0,00913	-4,00674	0,00971
68	-4,28201	0,01088	-3,57033	0,00935	-3,90112	0,00997
69	-4,1681	0,01103	-3,47985	0,00936	-3,80421	0,01005
70	-4,03334	0,01123	-3,37301	0,00960	-3,68924	0,01029
71	-3,92306	0,01116	-3,28701	0,00950	-3,59613	0,01022
72	-3,79374	0,01137	-3,18027	0,00991	-3,48306	0,01057
73	-3,66846	0,01143	-3,07526	0,00975	-3,37221	0,01052
74	-3,51761	0,01155	-2,97036	0,00969	-3,25001	0,01059
75	-3,39494	0,01176	-2,86425	0,00960	-3,13915	0,01067
76	-3,26189	0,01138	-2,75769	0,00981	-3,02418	0,01063
77	-3,1355	0,01110	-2,65064	0,00963	-2,91141	0,01043
78	-2,99443	0,01124	-2,53974	0,00948	-2,78885	0,01046
79	-2,86015	0,01075	-2,43355	0,00927	-2,67232	0,01013
80	-2,77565	0,00932	-2,37445	0,00804	-2,60412	0,00878
81	-2,66053	0,00867	-2,27471	0,00749	-2,49972	0,00818
82	-2,52344	0,00835	-2,17019	0,00722	-2,38082	0,00791
83	-2,40334	0,00799	-2,06117	0,00678	-2,26885	0,00752
84	-2,28214	0,00772	-1,96248	0,00665	-2,16068	0,00734
85	-2,15989	0,00692	-1,86844	0,00603	-2,05324	0,00663